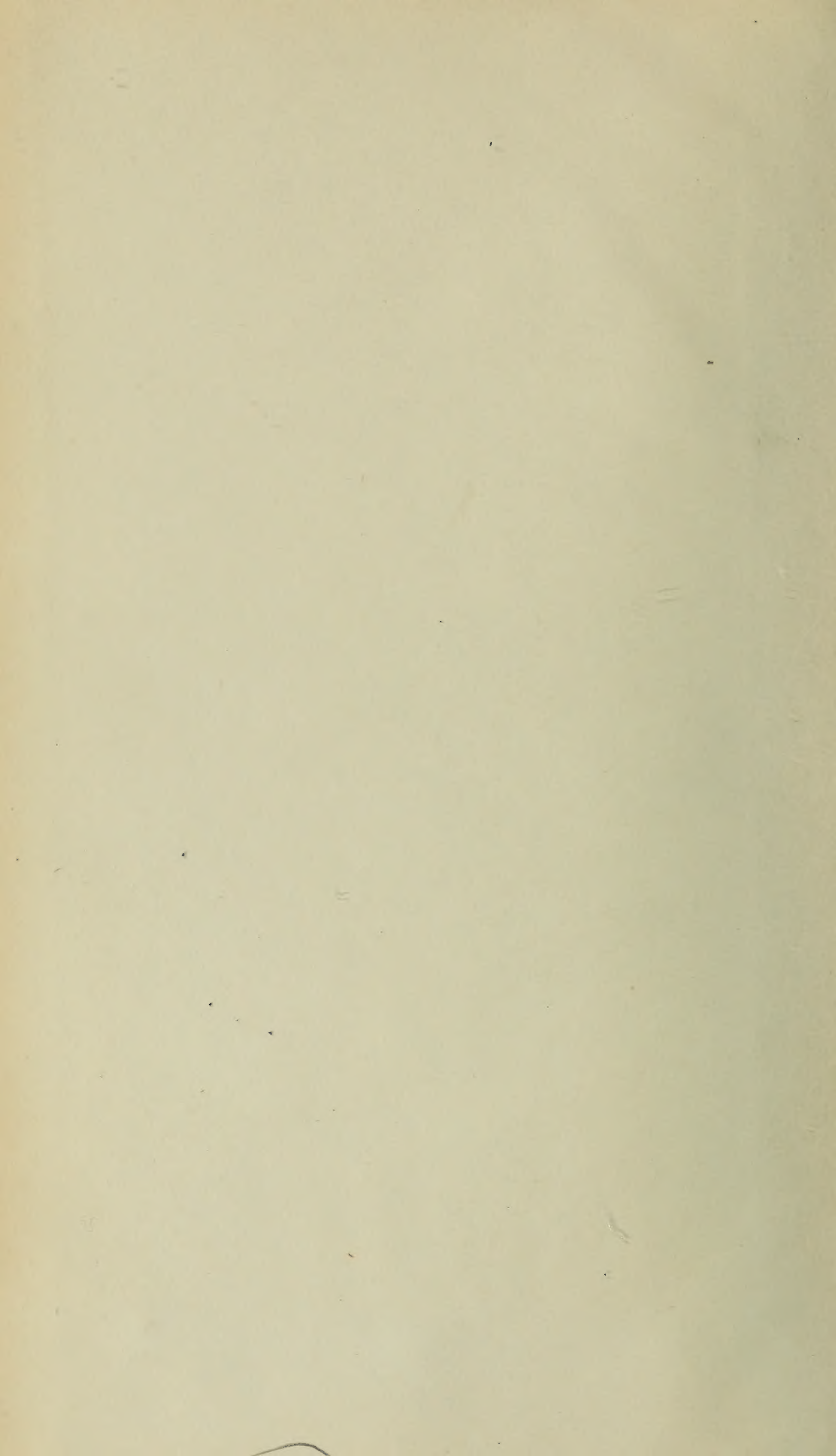


EXERCICES

DE

CALCUL NUMÉRIQUE

PAR

P. AUBERT & **G. PAPELIER**
Professeur au lycée Henri-IV. Professeur au lycée d'Orléans

TOME II

A L'USAGE DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
ET DES CANDIDATS AUX ÉCOLES
NAVALE, CENTRALE, POLYTECHNIQUE
DES PONTS ET CHAUSSÉES
DES MINES DE PARIS ET DE SAINT-ÉTIENNE

PARIS
LIBRAIRIE VUIBERT
63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1921

avril 1944

Don
du révérend
père Lavigne, o.m.i.

EXERCICES

DE

CALCUL NUMÉRIQUE

T. II.

A LA MÊME LIBRAIRIE

DES MÊMES AUTEURS

Exercices d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonométrie. — 2 vol. 22/14[cm].

TOME I, à l'usage des élèves de 1[re] année de Mathématiques spéciales, 4[e] édition . . . . 12 fr. »

TOME II, à l'usage des élèves de 2[e] année de Mathématiques spéciales, 3[e] édition . . . . 12 fr. »

Exercices de Géométrie analytique. — 3 vol. 22/14[cm].

TOME I : Géométrie plane, 2[e] édition . . . . 12 fr. »
Tome II : Géométrie plane (*suite*). . . . . 12 fr. »
Tome III : Géométrie dans l'espace. . . . . 12 fr. »

Exercices de Mécanique. — Vol. 22/14[cm]. . . . . 12 fr. »

Exercices de Calcul numérique. — 2 vol. 22/14[cm].

Tome I, à l'usage des élèves de Mathématiques A et B et de Mathématiques spéciales. . . . . 12 fr. »

OUVRAGES DE M. G. PAPELIER.

Précis de Mathématiques spéciales. — 4 vol. 22/14[cm].

Algèbre, Analyse et Trigonométrie, 7[e] édition . . . . 15 fr. »
Géométrie analytique, 5[e] édition . . . . 22 fr. »
Géométrie descriptive. 13 fr. »
Mécanique, 3[e] édition . . . . 12 fr. »

Formulaire de Mathématiques spéciales (Algèbre, Trigonométrie, Géométrie analytique). — Vol. 22/12[cm], de 224 pages, avec pages blanches pour notes, 5[e] édition. . . . . 5 fr. »

Leçons sur les coordonnées tangentielles, avec une préface de M. APPELL, Membre de l'Institut.

TOME I : Géométrie plane, 2[e] édition. . . . . 7 fr. »
TOME II : Géométrie dans l'espace. . . . . 7 fr. »

Formulaire de Mécanique, à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales, par Th. CARONNET, docteur ès sciences, professeur au collège Chaptal. — Vol. 22/12[cm], avec pages blanches pour notes, 2[e] édition. . . . . 3 fr. 25

Ajouter aux prix ci-dessus le montant de la majoration temporaire.

EXERCICES

DE

CALCUL NUMÉRIQUE

PAR

P. AUBERT & **G. PAPELIER**
Professeur au lycée Henri-IV. Professeur au lycée d'Orléans.

TOME II

A L'USAGE DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
ET DES CANDIDATS AUX ÉCOLES
NAVALE, CENTRALE, POLYTECHNIQUE
DES PONTS ET CHAUSSÉES
DES MINES DE PARIS ET DE SAINT-ÉTIENNE

PARIS
LIBRAIRIE VUIBERT
63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1921





EXERCICES

DE

CALCUL NUMÉRIQUE

CHAPITRE PREMIER

CALCULS LOGARITHMIQUES

1. *Étant données les fonctions*

$$f(n, x) = e^{-2nx} - e^{nx} \cos x - \frac{1+3n^2}{2n} e^{nx} \sin x,$$

$$F(n, x) = -\frac{3}{4} f(n, x) + f(-n, x),$$

calculer les valeurs numériques que prennent $f(n, x)$, $f(-n, x)$, $F(n, x)$ *quand on y fait*

$$x = \pi + \frac{11}{32}\pi, \qquad n = 0{,}2140272.$$

Peut-on, au degré d'approximation des tables à cinq décimales, décider avec certitude du signe de la fonction $F(n, x)$ *pour ces valeurs particulières de* n *et de* x?

(*École des Mines de Saint-Étienne*, 1917.)

Nous commencerons par calculer

$$e^{-2nx}, \qquad e^{nx} \cos x, \qquad \frac{1+3n^2}{2n} e^{nx} \sin x,$$

puis e^{2nx}, $e^{-nx}\cos x$, $\dfrac{1+3n^2}{2n}e^{-nx}\sin x$, et pour cela nous calculerons les logarithmes de ces diverses quantités.

Du logarithme de e^{nx} on déduira ceux de e^{-nx}, e^{2nx}, e^{-2nx}. On a

$$\log e^{nx} = nx \log e = n \, . \frac{43}{32}\pi \log e$$

et

$$\log \log e^{nx} = \log n + \log \pi + \log 43 - \log 32 + \log \log e.$$

Calcul de $\log n$.

$\Delta = 21$

2140	33041
2	4,2
7	1,47

$\log n = 1{,}33047$

Calcul de $\log \pi$.

$\Delta = 14$

3141	49707
5	7
9	1,26

$\log \pi = 0{,}49715$

Calcul de $\log e$.

$\Delta = 16$

2718	43425
2	3,2
8	1,28

$\log e = 0{,}43429$

Calcul de $\log \log e$.

$\Delta = 10$

4342	63769
9	9

$\log \log e = \bar{1}{,}63778$

Calcul de $\log e^{nx}$.

$\log n = 1{,}33047$
$\log \pi = 0{,}49715$
$\log 43 = 1{,}63347$
$-\log 32 = \bar{2}{,}49485$
$\log \log e = \bar{1}{,}63778$

$\log \log e^{nx} = \bar{1}{,}59372$ $\quad \Delta = 11$

62	3923
10	9

$\log e^{nx} = 0{,}39239$
$\log e^{-nx} = \bar{1}{,}60761$

Calcul de e^{2nx}.

$\Delta = 7$

$\log e^{2nx} = 0{,}78478$

6	6092
2	
1,4	2
0,6	9

$e^{2nx} = 6{,}09229$

Calcul de e^{-2nx}.

$\Delta = 26$

$\log e^{-2nx} = \bar{1}{,}21522$

11	1641
11	4

$e^{-2nx} = 0{,}16414$

Calcul de $e^{nx}\cos x$.

$$\cos x = -\cos\frac{11}{32}\pi = -\cos 68^{g},75$$

$$\log e^{nx} = 0,39239$$
$$\log|\cos x| = \bar{1},67339$$
$$\log e^{nx}|\cos x| = 0,06578 \qquad \Delta = 37$$

58	1163	
20		
18,5		5
1,5		4

$$e^{nx}\cos x = -1,16354$$

Calcul de $e^{-nx}\cos x$.

$$\log e^{-nx} = \bar{1},60761$$
$$\log|\cos x| = \bar{1},67339$$
$$\log e^{-nx}|\cos x| = \bar{1},28100 \qquad \Delta = 22$$

081	1909	
19		9

$$e^{-nx}\cos x = -0,19099$$

Calcul de $\log(1+3n^2)$.

$$\log n^2 = \bar{2},66094$$
$$\log 3 = 0,47712$$
$$\log 3n^2 = \bar{1},13806 \qquad \Delta = 31$$

799	1374	
7		2

$$3n^2 = 0,13742$$
$$1+3n^2 = 1,13742 \qquad \Delta = 38$$

1137	05576
4	15,2
2	0,76

$$\log(1+3n^2) = 0,05592$$

Calcul de $\frac{1+3n^2}{2n}e_{nx}\sin x$.

$$\log(1+3n^2) = 0,05592$$
$$-\log n = 0,66953$$
$$-\log 2 = \bar{1},69897$$
$$\log e^{nx} = 0,39239$$
$$\log|\sin x| = \bar{1},94543$$
$$\log\frac{1+3n^2}{2n}e^{nx}|\sin x| = 0,76224 \qquad \Delta = 7$$

3	5784	
1		
0,7		1
0,3		4

$$\frac{1+3n^2}{2n}e^{nx}\sin x = -5,78414$$

Calcul de $\frac{1+3n^2}{2n}e^{-nx}\sin x$.

$$\log(1+3n^2) = 0,05592$$
$$-\log n = 0,66953$$
$$-\log 2 = \bar{1},69897$$
$$\log e^{-nx} = \bar{1},60761$$
$$\log|\sin x| = \bar{1},94543$$
$$\log\frac{1+3n^2}{2n}e^{-nx}|\sin x| = \bar{1},97746 \qquad \Delta = 4$$

5	9494	
1		3

$$\frac{1+3n^2}{2n}e^{-nx}\sin x = -0,94943$$

Calcul de $f(n, x)$.

$$e^{-2nx} = 0,16414$$
$$-e^{nx}\cos x = 1,16354$$
$$-\frac{1+3n^2}{2n}e^{nx}\sin x = 5,78414$$
$$f(n, x) = 7,11182$$

Calcul de $f(-n, x)$.

$$e^{2nx} = 6,09229$$
$$-e^{-nx}\cos x = 0,19099$$
$$\frac{1+3n^2}{2n}e^{-nx}\sin x = \bar{1},05057$$
$$f(-n, x) = 5,33385$$

Résultats.

$$f(n, x) = 7,11182, \qquad f(-n, x) = 5,33385.$$

Il est alors facile de calculer $F(n, x)$. Nous avons

$$3f(n, x) = 21{,}33546, \qquad \frac{3}{4}f(n, x) = 5{,}33386,$$

et par suite

$$F(n, x) = 5{,}33385 - 5{,}33386 = -0{,}00001.$$

Vu la longueur du calcul et l'approximation des tables à cinq décimales, le signe de la fonction $F(n, x)$ ne peut être fixé avec certitude.

2. *On donne*

$$x = 2\pi - \frac{\pi}{8}, \qquad n = 0{,}10665459;$$

calculer les six quantités

$$e^{2nx}, \qquad e^{-nx}\cos x, \qquad \frac{1+3n^2}{2n}e^{-nx}\sin x,$$

$$e^{-2nx}, \qquad e^{nx}\cos x, \qquad \frac{1+3n^2}{2n}e^{nx}\sin x.$$

En conclure les valeurs numériques des trois fonctions $f(n, x)$, $f(-n, x)$, $F(n, x)$, *sachant que l'on a*

$$f(n, x) = e^{2nx} - e^{-nx}\cos x + \frac{1+3n^2}{2n}e^{-nx}\sin x,$$

$$F(n, x) = f(n, x) - f(-n, x).$$

Est-il possible de déterminer avec certitude le signe de $F(n, x)$*?*
On donne

$$\pi = 3{,}14159, \qquad \log\log e = \bar{1}{,}63778.$$

(*École des Mines de Saint-Étienne*, 1918.)

On trouve successivement

$$e^{2nx} = 3{,}51300, \qquad e^{-2nx} = 0{,}28466,$$

$$e^{-nx}\cos x = 0{,}49292, \qquad e^{nx}\cos x = 1{,}73164,$$

$$\frac{1+3n^2}{2n}e^{-nx}\sin x = -0{,}98982, \qquad \frac{1+3n^2}{2n}e^{nx}\sin x = -3{,}47730.$$

On en déduit

$$f(n, x) = 2{,}03026, \qquad f(-n, x) = 2{,}03032,$$

et

$$\mathrm{F}(n, x) = -0{,}00006.$$

On ne peut pas déterminer avec certitude le signe de $\mathrm{F}(n, x)$.

3. *On donne la fonction*

$$f(x) \equiv x \cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Évaluer, avec quatre décimales suivant le premier zéro,

1° $$f\left(\frac{\pi}{20}\right), \qquad f\left(\frac{2\pi}{20}\right), \qquad f\left(\frac{3\pi}{20}\right);$$

2° *Pour* $x = \frac{\pi}{10}$,

$$f\left(x + \frac{\pi}{20\,000}\right) - f(x).$$

N. B. — Si le calcul direct est impossible avec l'approximation demandée, on cherchera à transformer l'expression.

(*École des Mines de Paris*, 1920.)

1° *Calcul de* $f\left(\frac{\pi}{20}\right)$. $\qquad x = \frac{\pi}{20} = 10^{g}, \qquad x + \frac{\pi}{4} = 60^{g}.$

$$\begin{array}{rlll}
\log\cos 10^{g} & = \bar{1},99462 & & \\
\log \pi & = 0,49715 & & \\
-\log 20 & = \bar{2},69897 & & \\
\hline
\log x \cos x & = \bar{1},19074 & \Delta = 28 & \\
 & \ 61 & 1551 & \\
 & \ 13 & 5 & \\
x \cos x & = 0,15515 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rll}
 & & \Delta = 5 \\
\log\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & = \bar{1},90796 & \\
 & \ 5 & 8090 \\
 & \ 1 & 2 \\
\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & = 0,80902 & \\
x \cos x & = 0,15515 & \\
\hline
f\left(\frac{\pi}{20}\right) & = 0,96417 &
\end{array}$$

Calcul de $f\left(\frac{2\pi}{20}\right)$. $\quad x = \frac{2\pi}{20} = 20^g \qquad x + \frac{\pi}{4} = 70^g$.

$\log\cos 20^g = \bar{1},97821$	$\log\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \bar{1},94988$
$\log\frac{\pi}{10} = \bar{1},49715$	$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0,89100$
$\log x\cos x = \bar{1},47536 \qquad \Delta = 14$	$x\cos x = 0,29879$
$24 \qquad 2987$	$f\left(\frac{2\pi}{20}\right) = 1,18979$
$12 \qquad 9$	
$x\cos x = 0,29879$	

Calcul de $f\left(\frac{3\pi}{20}\right)$. $\quad x = \frac{3\pi}{20} = 30^g \qquad x + \frac{\pi}{4} = 80^g$.

$\log\cos 30^g = \bar{1},94988$	$\Delta = 5$
$\log\pi = 0,49715$	$\log\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \bar{1},97821$
$\log 3 = 0,47712$	$18 \qquad 9510$
$-\log 20 = \bar{2},69897$	$3 \qquad 6$
$\log x\cos x = \bar{1},62312 \qquad \Delta = 11$	$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0,95106$
$04 \qquad 4198$	$x\cos x = 0,41987$
$8 \qquad 7$	$f\left(\frac{3\pi}{20}\right) = 1,37093$
$x\cos x = 0,41987$	

2° Nous utiliserons la formule de Taylor

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x+\theta h), \qquad (0 < \theta < 1)$$

pour $x = \frac{\pi}{10}$, $h = \frac{\pi}{20\,000}$.

Calculons d'abord $hf'(x)$. Nous avons

$$f'(x) = -x\sin x + \cos x + \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -x\sin x + 2\cos\frac{\pi}{8}\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$$

ou

$$f'(x) = -x\sin x + p, \qquad \text{en posant} \qquad p = 2\cos 25^g\cos 45^g.$$

$$\log \sin x = \bar{1},48998$$
$$\log \frac{\pi}{10} = \bar{1},49715$$
$$\log x \sin x = \bar{2},98713$$
$$x \sin x = 0,09708$$

$$\log 2 = 0,30103$$
$$\log \cos 25^g = \bar{1},96562$$
$$\log \cos 45^g = \bar{1},88105$$
$$\log p = 0,14770 \qquad \Delta = 31$$
$$68 \qquad 1405$$
$$2 \qquad 07$$
$$p = 1,40507$$

$$-x \sin x = \bar{1},90292$$
$$p = 1,40507$$
$$f'(x) = 1,30799$$

$$\log f'(x) = 0,11661$$
$$\log \pi = 0,49715$$
$$-\log 20000 = \bar{5},69897$$
$$\log hf'(x) = \bar{4},31273 \qquad \Delta = 21$$
$$60 \qquad 2054$$
$$13 \qquad 6$$
$$hf'(x) = 0,00020546$$

Évaluons maintenant une limite supérieure de $\frac{h^2}{2} f''(x + \theta h)$.

Nous avons

$$f''(x) = -x \cos x - 2 \sin x - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -f(x) - 2 \sin x.$$

Nous avons trouvé plus haut que pour $x = \frac{\pi}{10}$, $f(x)$ est égal à 1,18979; donc $f(x) < 1, 2$. D'autre part,

$$\log \sin x = \bar{1},48998, \qquad \sin x < 0,31.$$

Par suite, $f''(x)$ est négatif et supérieur en valeur absolue à $1,2 + 0,62$, et comme h est très petit, on peut affirmer que $|f''(x + \theta h|$ est moindre que 2. Donc

$$\left|\frac{h^2}{2} f''(x + \theta h)\right| < h^2 < \frac{\pi^2}{20\,000^2}$$

ou, comme $\pi^2 < 10$,

$$\left|\frac{h^2}{2} f''(x + \theta h)\right| < \frac{25}{10^9}.$$

On en conclut que $f(x + h) - f(x)$ est compris entre $hf'(x)$ et $hf'(x) - \frac{25}{10^9}$, ou entre 0,00020546 et 0,000205435; on a donc, avec quatre chiffres exacts,

$$f(x + h) - f(x) = 0,0002054.$$

Réponses.

1° $f\left(\frac{\pi}{20}\right)=0{,}9641,\quad f\left(\frac{2\pi}{20}\right)=1{,}1897,\quad f\left(\frac{3\pi}{20}\right)=1{,}3709.$

2° $$f\left(\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{20\,000}\right)-f\left(\frac{\pi}{10}\right)=0{,}0002054.$$

4. *Calculer les racines cinquièmes du nombre imaginaire* $5+3i$.

Nous mettons $5+3i$ sous forme trigonométrique,

$$5+3i=\sqrt{34}\left(\frac{5}{\sqrt{34}}+\frac{3}{\sqrt{34}}i\right),$$

et nous déterminons un angle φ, qu'on peut supposer compris entre 0 et 100 grades et défini par les égalités

$$\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{34}},\qquad \sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{34}},$$

ou

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{5}.$$

Les racines cinquièmes cherchées sont alors

$$x_k=\sqrt[10]{34}\left(\cos\frac{\varphi+400k}{5}+i\sin\frac{\varphi+400k}{5}\right),$$

où l'on donne à k cinq valeurs entières consécutives quelconques, par exemple 0, 1, 2, 3, 4.

Nous poserons pour simplifier

$$\sqrt[10]{34}=r,\qquad \frac{\varphi+400k}{5}=\frac{\varphi}{5}+80k=\alpha_k,$$

et nous aurons

$$x_k=r(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k).$$

Il nous faudra alors calculer les logarithmes des valeurs absolues de $r\cos\alpha_k$ et $r\sin\alpha_k$, et nous en déduirons les valeurs de ces produits et celles de x_k.

Calcul de $\log r$.

$$\log 34 = 1,53148$$
$$\log r = \log \sqrt[10]{34} = 0,15315$$

Calcul de φ.

$$\log 3 = 0,47712$$
$$-\log 5 = \bar{1},30103$$
$$\log \operatorname{tg} \varphi = \bar{1},77815 \qquad \Delta = 15$$

09	34,40
6	40

$$\varphi = 34,4040$$
$$\frac{\varphi}{5} = 6,8808$$

Calcul de $r \cos \alpha_0$.

$$\log r = 0,15315$$
$$\log \cos \alpha_0 = \bar{1},99746$$
$$\log r \cos \alpha_0 = 0,15061 \qquad \Delta = 31$$

45	1414
16	5

$$r \cos \alpha_0 = 1,4145$$

Calcul de $\log \sin \alpha_0$.

$$\Delta = 63$$

6,88	$\bar{1}$,03286
08	5,04

$$\log \sin \alpha_0 = \bar{1},03291$$

Calcul de $r \sin \alpha_0$.

$$\log r = 0,15315$$
$$\log \sin \alpha_0 = \bar{1},03291$$
$$\log r \sin \alpha_0 = \bar{1},18606 \qquad \Delta = 28$$

583	1534
23	8

$$r \sin \alpha_0 = 0,15348$$

$$x_0 = 1,4145 + 0,15348i$$

Calcul de $\log \cos \alpha_1$.

$$\alpha_1 = \frac{\varphi}{5} + 80 = 86,8808$$

$$\Delta = 33$$

86,89	$\bar{1}$,31065
9	29,7
2	0,66

$$\log \cos \alpha_1 = \bar{1},31095$$

Calcul de $r \cos \alpha_1$.

$$\log r = 0,15315$$
$$\log \cos \alpha_1 = \bar{1},31095$$
$$\log r \cos \alpha_1 = \bar{1},46410 \qquad \Delta = 15$$

04	2911
6	4

$$r \cos \alpha_1 = 0,29114$$

Calcul de $r \sin \alpha_1$.

$$\log r = 0,15315$$
$$\log \sin \alpha_1 = \bar{1},99071$$
$$\log r \sin \alpha_1 = 0,14386 \qquad \Delta = 31$$

64	1392
22	7

$$r \sin \alpha_1 = 1,3927$$

$$x_1 = 0,29114 + 1,3927i$$

Calcul de $\log |\cos \alpha_2|$.

$$\alpha_2 = \frac{\varphi}{5} + 160 = 166,8808$$
$$\alpha_2 = 200 - 33,1192$$

$$\Delta = 4$$

33,12	$\bar{1}$,93837
08	0,32

$$\log |\cos \alpha_2| = \bar{1},93837$$

Calcul de $\log \sin \alpha_2$.

$\Delta = 12$

33,11	$\bar{1}$,69632
9	10,8
2	0,24

$\log \sin \alpha_2 = \bar{1},69643$

Calcul de $r \cos \alpha_2$.

$\log r = 0,15315$

$\log |\cos \alpha_2| = \bar{1},93837$

$\log |r \cos \alpha_2| = 0,09152$ $\quad \Delta = 35$

32	1234
20	6

$r \cos \alpha_2 = -1,2346$

Calcul de $r \sin \alpha_2$.

$\log r = 0,15315$

$\log \sin \alpha_2 = \bar{1},69643$

$\log r \sin \alpha_2 = \bar{1},84958$ $\quad \Delta = 6$

4	7072
4	7

$r \sin \alpha_2 = 0,70727$

$x_2 = -1,2346 + 0,70727i$

Calcul de $\log |\cos \alpha_3|$.

$\alpha_3 = \frac{\varphi}{5} + 240 = 246,8808$

$\alpha_3 = 200 + 46,8808$

$\Delta = 6$

46,89	1,86970
9	5,4
2	0,12

$\log |\cos \alpha_3| = \bar{1},86976$

Calcul de $\log |\sin \alpha_3|$.

$\Delta = 8$

46,88	$\bar{1}$,82712
08	0,64

$\log |\sin \alpha_3| = \bar{1},82713$

Calcul de $r \cos \alpha_3$.

$\log r = 0,15315$

$\log |\cos \alpha_3| = \bar{1},86976$

$\log |r \cos \alpha_3| = 0,02291$ $\quad \Delta = 41$

84	1054
7	2

$r \cos \alpha_3 = -1,0542$

Calcul de $r \sin \alpha_3$.

$\log r = 0,15315$

$\log |\sin \alpha_3| = \bar{1},82713$

$\log |r \sin \alpha_3| = \bar{1},98028$

$r \sin \alpha_3 = -0,9556$

$x_3 = -1,0542 - 0,9556i$

Calcul de $\log \cos \alpha_4$.

$\alpha_4 = \frac{\varphi}{5} + 320 = 326,8808$

$\alpha_4 = 400 - 73,1192$

$\Delta = 15$

73,12	$\bar{1}$,61257
08	1,2

$\log \cos \alpha_4 = \bar{1},61258$

Calcul de $\log|\sin\alpha_4|$.

$\Delta = 3$

73,11	$\bar{1},96005$
9	2,7
2	0,06

$\log|\sin\alpha_4| = \bar{1},96008$

Calcul de $r\cos\alpha_4$.

$$\log r = 0,15315$$
$$\log\cos\alpha_4 = \bar{1},61258$$
$$\log r\cos\alpha_4 = \bar{1},76573 \qquad \Delta = 7$$

67	5830
6	9

$$r\cos\alpha_4 = 0,58309$$

Calcul de $r\sin\alpha_4$.

$$\log r = 0,15315$$
$$\log|\sin\alpha_4| = \bar{1},96008$$
$$\log|r\sin\alpha_4| = 0,11323 \qquad \Delta = 33$$

294	1297
29	9

$$r\sin\alpha_4 = -1,2979$$

$$x_4 = 0,58309 - 1,2979i$$

Résultats.

$$x_0 = 1,4145 + 0,15348i,$$
$$x_1 = 0,29114 + 1,3927i,$$
$$x_2 = -1,2346 + 0,70727i,$$
$$x_3 = -1,0542 - 0,9556i,$$
$$x_4 = 0,58309 - 1,2979i.$$

5. *Calculer les racines quatrièmes du nombre imaginaire* $-3\,687 + 5\,472i$.

Nous déterminerons le module ρ et l'argument φ du nombre imaginaire donné par les formules $(100 < \varphi < 200)$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{5\,472}{3\,687}, \qquad \rho = \frac{5\,472}{\sin\varphi},$$

et les racines quatrièmes seront

$$\pm\sqrt[4]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{4} + i\sin\frac{\varphi}{4}\right) \quad \text{et} \quad \pm\sqrt[4]{\rho}\left(-\sin\frac{\varphi}{4} + i\cos\frac{\varphi}{4}\right).$$

On trouve ainsi

$$\pm(7,7260 + i4,6410) \quad \text{et} \quad \pm(-4,6410 + i7,7260).$$

6. *Calculer les racines cubiques de* $1{,}25i$.

On trouve

$$-1{,}0772i \qquad \text{et} \qquad \pm 0{,}9329 + 0{,}5386i.$$

7. *Calculer les racines septièmes imaginaires de* 1.

On trouve

$$0{,}6235 \pm 0{,}7818i,$$
$$-0{,}2225 \pm 0{,}9749i,$$
$$-0{,}9010 \pm 0{,}4339i.$$

8. *Calculer les racines huitièmes de* -1.

On trouve

$$\pm 0{,}9239 \pm 0{,}3827i,$$
$$\pm 0{,}3827 \pm 0{,}9239i.$$

9. *Calculer les racines cubiques de* $2 + i$.

On trouve

$$1{,}2920 + 0{,}2013i,$$
$$-0{,}8203 + 1{,}0183i,$$
$$-0{,}4717 - 1{,}2196i.$$

10. *La corde* AB *et la flèche* CM *d'un arc de cercle* AMB *ont pour longueurs*

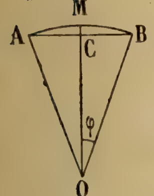
$$AB = 31^{m},30 \qquad \textit{et} \qquad CM = 1^{m},16.$$

1° *Calculer la longueur* l *de l'arc* AMB *par les tables de logarithmes à cinq décimales, avec l'approximation que ces tables comportent.*

2° *Calculer* l *avec la même approximation, sans faire usage des tables.*

(*École Polytechnique*, 1912.)

1° Soit O le centre du cercle; désignons par 2φ la valeur de l'angle AOB en *radians* et par $2x$ sa valeur en *grades*, nous avons



$$\varphi = \frac{\pi x}{200}.$$

On obtient aisément les formules

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{2CM}{AB}, \qquad l = \text{arc}\,AMB = \frac{\varphi}{\sin\varphi}AB.$$

Nous prendrons le centimètre pour unité de longueur et nous poserons

$$AB = 3\,130, \qquad CM = 116.$$

Calcul de x.

$$\log 2 = 0{,}30103$$
$$\log CM = 2{,}06446$$
$$-\log AB = \bar{4}{,}50446$$
$$\log \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \bar{2}{,}86995 \qquad \Delta = 93$$

3	4,71	
2		02

$$\frac{x}{2} = 4{,}7102$$
$$x = 9{,}4204$$

Calcul de $\log x$. $\Delta = 5$

9420	97405
4	2

$$\log x = 0{,}97407$$

Calcul de $\log \sin \varphi$. $\Delta = 46$

9,42	$\bar{1}$,16858
04	1,84

$$\log \sin\varphi = \bar{1}{,}16860$$

Calcul de $\log \varphi$.

$$\log \pi = 0{,}49715$$
$$\log x = 0{,}97407$$
$$-\log 200 = \bar{3}{,}69897$$
$$\log\varphi = \bar{1}{,}17019$$

Calcul de l.

$$\log\varphi = \bar{1}{,}17019$$
$$\log AB = 3{,}49554$$
$$-\log\sin\varphi = 0{,}83140$$
$$\log l = 3{,}49713 \qquad \Delta = 14$$

07	3141
6	4

$$l = 3141^{\text{cm}},4.$$

2° Pour faire ce calcul sans faire usage des tables, nous partirons de la formule

$$l = \frac{\varphi}{\sin\varphi}AB,$$

ou, en posant $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=u$, $\varphi=2\operatorname{arc.tg} u$,

$$l=\text{AB}.\operatorname{arc\,tg} u.\frac{1+u^2}{u}.$$

Or, on a

$$\operatorname{arc\,tg} u=u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\dots.$$

Comme u est inférieur à $\frac{1}{10}$, il suffit de prendre les deux premiers termes, ce qui donne

$$\operatorname{arc\,tg} u=u-\frac{u^3}{3},$$

puis

$$l=\text{AB}\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\frac{1+u^2}{u}=\text{AB}\left(1-\frac{u^2}{3}\right)(1+u^2),$$

ou, en négligeant le terme en u^4,

$$l=\text{AB}\left(1+\frac{2u^2}{3}\right);$$

comme $u=\frac{2\text{CM}}{\text{AB}}$, on a

$$l=\text{AB}+\frac{8\overline{\text{CM}}^2}{3\text{AB}}=3\,130+\frac{107\,648}{3.3130}=3\,141^{\text{cm}},4.$$

11. *Soit la fonction*

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{8x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Calculer les valeurs que prend $f(x)$ quand on y fait successivement $x=7$ et $x=8$.

On donne

$$\log\pi=0,49715,\quad \frac{1\,400}{\pi}=445,633841,\quad \frac{1\,600}{\pi}=509,295818.$$

(*École des Mines de Saint-Étienne*, 1913.)

En posant

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{8x},$$

on a aisément

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \quad \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \varphi\right)}{\cos \varphi};$$

ou, en désignant par u la valeur de x en grades,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \frac{\cos(u - 50 - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

1° *Calcul de $f(x)$ pour $x = 7$.*

On a successivement

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{56}, \qquad \log \operatorname{tg} \varphi = \bar{2},25181.$$

Pour calculer φ on applique la méthode des petits angles. On remarque que φ est compris entre $1^g,13$ et $1^g,14$; par suite

$$\log \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi} = \bar{4},19617.$$

On a alors

$$\begin{array}{rl} \log \operatorname{tg} \varphi = & \bar{2},25181 \\ -\log \dfrac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi} = & 3,80383 \\ \hline \log \varphi = & 2,05564 \end{array} \qquad \Delta = 38$$

$$\begin{array}{rr} 38 & 1\,136 \\ \hline 26 & \\ 22,8 & 6 \\ \hline 3,2 & 8 \end{array}$$

$$\varphi = 1,13668$$

$$u - 50 - \varphi = \frac{1\,400}{\pi} - 50 - \varphi = 445,633841 - 51,13668$$

$$u - 50 - \varphi = 394,49716 = 400 - 5,5028.$$

$$\log 2 = 0{,}30103$$
$$-\log\pi = \bar{1}{,}50285$$
$$-\log x = \bar{1}{,}15490$$
$$\log\frac{2}{\pi x} = \bar{2}{,}95878$$

$$\log\sqrt{\frac{2}{\pi x}} = \bar{1}{,}47939$$
$$\log\cos(u - 50 + \varphi) = \bar{1}{,}99838$$
$$-\log\cos\varphi = 0{,}00007$$
$$\log f(x) = \bar{1}{,}47784$$

$$f(7) = 0{,}30050.$$

2° *Calcul de* $f(x)$ *pour* $x = 8$.

En opérant d'une manière analogue, on trouve successivement

$$\log \operatorname{tg}\varphi = \bar{2}{,}19382, \qquad 0^g{,}99 < \varphi < 1^g,$$
$$\log\varphi = \bar{1}{,}99766, \qquad \varphi = 0^g{,}994625,$$
$$\log\cos(u - 50 - \varphi) = \bar{1}{,}78473, \qquad \log\cos\varphi = \bar{1}{,}99995,$$
$$\log\sqrt{\frac{2}{\pi x}} = \bar{1}{,}45039, \qquad \log f(x) = \bar{1}{,}23517,$$

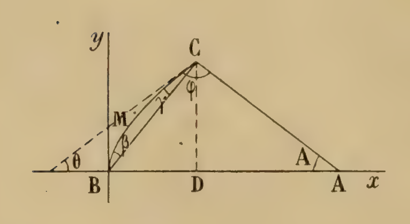
$$f(8) = 0{,}17186.$$

Réponse.

$$f(7) = 0{,}30050, \qquad f(8) = 0{,}17186.$$

12. *Dans la figure* ABC *on donne*

$$AB = 252^m{,}35,$$
$$AC = 195^m{,}28,$$
$$A = 31^g{,}4265;$$



la courbe BMC *est un arc de parabole ayant* B *pour sommet et* BA *pour axe.*

Calculer :

1° *La surface* ABMC.

2° *L'angle* φ *que fait en* C *l'arc de parabole avec la droite* AC.

3° *Les angles* β *et* γ *que fait en* B *et* C *l'arc de parabole avec la corde* BC.

(*École des Mines de Paris*, 1913.)

Prenons pour axe des x l'axe BA de la parabole et pour axe des y la tangente au sommet.

Nous poserons

$$b = \mathrm{AC} = 195{,}28, \qquad c = \mathrm{AB} = 252{,}35,$$

et nous désignerons par x, y les coordonnées du point C. On a immédiatement

$$(1) \qquad x = c - b\cos \mathrm{A}, \qquad y = b \sin \mathrm{A}.$$

1° La surface demandée,

$$\mathrm{S} = \mathrm{ABMC},$$

est la somme du triangle ABC et du segment parabolique BMC. L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{cy}{2}$, et celle du segment est égale à

aire DBMC — triangle BDC.

Or l'aire DBMC est égale aux deux tiers du rectangle construit sur BD et DC; par suite, l'aire du segment parabolique BMC est égale à

$$\frac{2}{3}xy - \frac{1}{2}xy \qquad \text{ou} \qquad \frac{xy}{6},$$

et

$$(2) \qquad \mathrm{S} = \frac{xy}{6} + \frac{cy}{2} = \frac{y(x+3c)}{6}.$$

2° Soit θ l'angle que fait la tangente en C avec Ox, on a

$$(3) \qquad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{2x} \qquad \text{et} \qquad \varphi = 200 - (\mathrm{A} + \theta),$$

en prenant le grade pour unité.

3° On a

$$(4) \qquad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{x}{y}, \qquad \gamma = 100 - \beta - \theta.$$

Les formules (1), (2), (3) et (4) permettent de résoudre le problème.

Calcul de $\log b$.

$\Delta = 22$

1952 29048

8 17,6

$\log b = 2,29066$

Calcul de $\log \cos A$.

$\Delta = 4$

31,43 $\bar{1},94477$

3 1,2

5 0,2

$\log \cos A = \bar{1},94478$

Calcul de $\log \sin A$.

$\Delta = 13$

31,42 $\bar{1},67555$

6 7,8

5 0,65

$\log \sin A = \bar{1},67563$

Calcul de x *et de* $\log x$.

$\log b = 2,29066$

$\log \cos A = \bar{1},94478$

$\log b \cos A = 2,23544$

$\Delta = 25$

28 1719

16 6

$b \cos A = 171,96$

$c = 252,35$

$x = 80,39$

$\log x = 1,90520$

Calcul de $\log y$.

$\log b = 2,29066$

$\log \sin A = \bar{1},67563$

$\log y = 1,96629$

Calcul de $\log(x + 3c)$.

$x = 80,39$

$3c = 757,05$

$x + 3c = 837,44$

$\Delta = 5$

8374 92293

4 2

$\log(x + 3c) = 2,92295$

Calcul de S.

$\log(x + 3c) = 2,92295$

$\log y = 1,96629$

$-\log 6 = \bar{1},22185$

$\log S = 4,11109$

$\Delta = 33$

093 1291

16 5

$S = 12915$

Calcul de θ.

$\log y = 1,96629$

$-\log x = \bar{2},09480$

$-\log 2 = \bar{1},69897$

$\log \operatorname{tg} \theta = \bar{1},76006$

$\Delta = 16$

5997 33,24

9

8 5

1 6

$\theta = 33,2456$

Calcul de φ.

$\varphi = 200 - (A + \theta)$

$A = 31,4265$

$\theta = 33,2456$

$A + \theta = 64,6721$

$\varphi = 135,3279$

Calcul de β.

$$\begin{array}{rl} \log x = & 1{,}90520 \\ -\log y = & \bar{2}{,}03371 \\ \hline \log \operatorname{tg}\beta = & \bar{1}{,}93891 \\ & 81 \qquad 45{,}53 \\ \hline & 10 \\ & 9{,}8 \qquad 7 \\ \hline & 0{,}2 \qquad 1 \\ \beta = & 45{,}5371 \end{array} \qquad \Delta = 14$$

Calcul de γ.

$$\begin{array}{rl} \gamma = & 100 - (\beta + \theta) \\ \beta = & 45{,}5371 \\ \theta = & 33{,}2456 \\ \hline \beta + \theta = & 78{,}7827 \\ \gamma = & 21{,}2173 \end{array}$$

Résultats.

$S = 12\,915^{m2}$,
$\varphi = 135^g{,}3279$,
$\beta = 45^g{,}5371$,
$\gamma = 21^g{,}2173$.

13. *On donne la fonction* $y = e^{\operatorname{arc}\operatorname{tg} x}$.
Calculer les valeurs de y pour les valeurs suivantes de x :

0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1, 1,5574, 2, 3, ... *n*.

A quelle particularité correspond la valeur 1,5574?
Données :

$$\log \log e = \bar{1}{,}63778, \qquad \log \frac{\pi}{2} = 0{,}19612.$$

On prendra pour arc tg*x la détermination comprise entre* 0 *et* $\frac{\pi}{2}$.

(*École des Mines de Saint-Étienne*, 1919.)

On a

$$\log y = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x \log e,$$

ou, en désignant par α la valeur en grades de arc tg$x$,

$$\log y = \frac{\pi\alpha}{200} . \log e,$$

puis

$$\log \log y = \log \frac{\pi}{200} + \log \log e + \log \alpha.$$

On peut calculer une fois pour toutes la somme

$$s = \log \frac{\pi}{200} + \log \log e;$$

d'après les données on a

$$\log \frac{\pi}{200} = \bar{2},19612$$

$$\log \log e = \bar{1},63778$$

$$s = \bar{3},83390$$

et

$$\log \log y = s + \log \alpha.$$

Pour $x = 0,2,$ $\operatorname{tg} \alpha = 0,2$

$$\log \operatorname{tg} \alpha = \bar{1},30103,$$

d'où l'on déduit

$$\alpha = 12^{g},5666,$$

puis

$$\log \alpha = 1,09922,$$

et

$$\log \log y = \bar{2},93312.$$

On en tire

$$\log y = 0,08573 \quad \text{et} \quad y = 1,21823.$$

On trouve par un calcul analogue

pour $x = 0,4,$ $y = 1,46303,$
pour $x = 0,6,$ $y = 1,71672,$
pour $x = 0,8,$ $y = 1,96350,$
pour $x = 1,$ $y = 2,19325.$
Pour $x = 1,5574,$ on a $\operatorname{arc\,tg} x = 1$ et $y = e,$
pour $x = 2,$ $y = 3,02571,$
pour $x = 3,$ $y = 3,4870, \ldots$
etc.

14. *Calculer le volume* V *d'un parallélépipède oblique, connaissant les longueurs a, b, c des trois arêtes et les angles α, β, γ que ces arêtes font entre elles.*

1° *On démontrera la formule*

$$V = 2abc\sqrt{\sin p \sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)},$$

où $$2p = \alpha + \beta + \gamma;$$

2° *On appliquera cette formule aux données numériques suivantes :*

$$a = 7^{m},36592, \qquad \alpha = 62^\circ 53' 17'',4,$$
$$b = 6^{m},72941, \qquad \beta = 65^\circ 48' 56'',7,$$
$$c = 5^{m},84327, \qquad \gamma = 68^\circ 34' 48'',5.$$

(*Certificat d'Astronomie, Marseille*, 1899.)

On a

$$2p = 197^\circ 17' 02'',6,$$
$$p = 98^\circ 38' 31'',3,$$
$$p - \alpha = 35^\circ 45' 13'',9,$$
$$p - \beta = 32^\circ 49' 34'',6,$$
$$p - \gamma = 30^\circ 03' 42'',8.$$

Nous poserons pour simplifier

$$A = \sqrt{\sin p \sin(p - \alpha) \sin(p - \beta) \sin(p - \gamma)}.$$

On peut écrire

$$p = 180^\circ - 81^\circ 21' 28'',7,$$

et on en déduit aussitôt

$$\log \sin p = \bar{1},99504.$$

Calcul de $\log \sin(p - \alpha)$.

$\Delta = 17$

$35^\circ 45'$	$\bar{1},76660$
$10''$	2,8
$3''$	0,85
9	0,26

$\log \sin(p - \alpha) = \bar{1},76664$

Calcul de $\log \sin(p - \beta)$.

$\Delta = 20$

$32^\circ 49'$	$\bar{1},73396$
$30''$	10
$4''$	1,33
6	0,2

$\log \sin(p - \beta) = \bar{1},73408$

Calcul de $\log \sin(p - \gamma)$.

$\Delta = 21$

$30^\circ 03'$	$\bar{1},69963$
$40''$	14
$2''$	0,7
8	0,28

$\log \sin(p - \gamma) = \bar{1},69978$

Calcul de $\log A$.

$$\log \sin p = \bar{1},99504$$
$$\log \sin(p - \alpha) = \bar{1},76664$$
$$\log \sin(p - \beta) = \bar{1},73408$$
$$\log \sin(p - \gamma) = \bar{1},69978$$
$$2 \log A = \bar{1},19554$$
$$\log A = \bar{1},59777$$

Calcul de log a.

$\Delta = 6$

7365	86717
9	5,4
2	0,12

$\log a = 0{,}86723$

Calcul de log b.

$\Delta = 7$

6729	82795
4	2,8
1	0,07

$\log b = 0{,}82798$

Calcul de log c.

$\Delta = 7$

5843	76664
2	1,4
7	0,49

$\log c = 0{,}76666$

Calcul de V.

$\log 2 = 0{,}30103$
$\log a = 0{,}86723$
$\log b = 0{,}82798$
$\log c = 0{,}76666$
$\log A = \bar{1}{,}59777$

$\log V = 2{,}36067$ $\Delta = 19$

59	2294
8	4

$V = 229{,}44.$

Réponse.

$V = 229^{m^3}{,}44.$

15. *Calculer le volume* V *d'un tétraèdre* OABC *connaissant les longueurs* a, b, c *des trois arêtes qui aboutissent à un même sommet* O, *ainsi que les angles* α, β, γ *que ces arêtes font deux à deux.*

Données numériques :

$$a = 17^{m}{,}246, \qquad \alpha = 75^\circ 27' 34''{,}7,$$
$$b = 12^{m}{,}723, \qquad \beta = 82^\circ 43' 51''{,}2,$$
$$c = 7^{m}{,}932, \qquad \gamma = 67^\circ 58' 27''{,}9.$$

(*Certificat d'Astronomie, Marseille*, 1907.)

En posant $2p = \alpha + \beta + \gamma$, le volume V est donné par la formule

$$V = \frac{abc}{3}\sqrt{\sin p \sin(p - \alpha)\sin(p - \beta)\sin(p - \gamma)}.$$

On trouve $V = 260^{m^3}{,}12.$

16. *L'équation* $yx^{1,4} = 2$ *représente une courbe qui passe par le point* M, *de coordonnées* $x = 1$, $y = 2$.

1° *Calculer l'ordonnée du point* N *dont l'abscisse est* $x = 2$.

2° *Calculer, en grades et fractions de grades, les angles que font les tangentes en* M *et* N *avec l'axe des* x.

3° *Calculer l'aire comprise entre l'arc* MN, *l'axe des* x *et les ordonnées des points* M *et* N.

4° *Calculer les coordonnées du point d'intersection des tangentes en* M *et* N.

(*École des Mines de Paris*, 1911.)

1° L'ordonnée du point N est $\lambda = 2^{-0,4}$. On a

$$\log\lambda = -0,4\log 2 = \bar{1},87959,$$

et l'on en déduit

$$\lambda = 0,75787.$$

2° La pente de la tangente en un point quelconque est

$$y' = -2,8x^{-2,4}.$$

Au point M, cette pente est égale à $-2,8$, et la tangente fait avec Ox un angle égal à $121^g,8376$.

Au point N, la pente est égale à $-0,7\lambda$; on en déduit aisément que la tangente au point N fait avec Ox un angle égal à $168^g,9488$.

3° L'aire demandée est

$$\int_1^2 2x^{-1,4}dx = \left|\frac{2x^{-0,4}}{-0,4}\right|_1^2 = 5(1-\lambda)$$

ou

$$1,21065.$$

4° Les deux tangentes ont pour équations

$$y - 2 = -2,8(x-1),$$
$$y - \lambda = -0,7\lambda(x-2);$$

leur point de rencontre a pour coordonnées

$$x = \frac{2,4(2-\lambda)}{0,7(4-\lambda)}, \qquad y = \frac{4,8\lambda}{4-\lambda},$$

ou

$$x = 1.3136 \qquad y = 1,1220.$$

17. *L'unité de longueur est le mètre.*

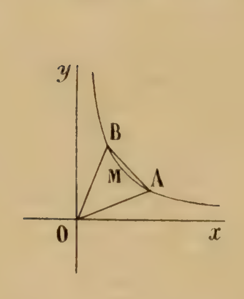
On considère, dans un système d'axes rectangulaires, l'hyperbole $xy = 1$.

La droite OA *fait avec* Ox *un angle égal à* $\frac{\pi}{8}$; *la droite* OB *fait avec* Oy *un angle égal à* $\frac{\pi}{8}$.

Calculer l'aire du triangle mixtiligne OAMB, *et celle du segment* AMB. *Calculer aussi la longueur de la corde* AB.

(*École des Mines de Paris*, 1914.)

L'aire du triangle mixtiligne OAMB est égale à



$$-\mathrm{L}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{8} = -\frac{\log \mathrm{tg}\frac{\pi}{8}}{\log e} = +\frac{0,38278}{0,43429}$$
$$= 0^{m^2},8814.$$

Celle du segment AMB est égale à $1 - 0,8814$ ou à $0^{m^2},1186$.

Enfin la longueur de la corde AB est égale à $2\sqrt{\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}}$ ou $1^m,2872$.

18. *Dans un triangle* ABC, *on donne*

$$a = 43^m,2875, \qquad b = 62^m,9457, \qquad A = 36^\circ\,23'\,37'',5.$$

1° *Calculer l'angle* B.

2° *On considère tous les arcs qui ont même sinus que l'angle* A *et les sinus des tiers de ces arcs. Donner les valeurs distinctes de ces sinus, et former à l'aide de ces nombres l'équation algébrique dont ils sont les racines.*

Vérifier que le résultat est identique à la formule connue de trigonométrie relative à la division des arcs.

(*École Polytechnique*, 1899.)

1° L'angle B est défini par la formule

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a};$$

on obtient deux valeurs supplémentaires, toutes deux acceptables,

$$B_1 = 59^\circ 37' 51'', \qquad B_2 = 120^\circ 22' 09''.$$

2° Il existe trois valeurs distinctes pour les sinus : ce sont les sinus des angles $\frac{A}{3}$, $120^\circ + \frac{A}{3}$, $240^\circ + \frac{A}{3}$.

On trouve aisément

$$\sin \frac{A}{3} = 0,21015,$$

$$\sin \left(120^\circ + \frac{A}{3}\right) = 0,74160,$$

$$\sin \left(240^\circ + \frac{A}{3}\right) = -0,95174.$$

L'équation algébrique dont ces nombres sont les racines est

$$x^3 - S_1 x^2 + S_2 x - S_3 = 0,$$

S_1 désignant la somme de ces nombres, S_2 la somme de leurs produits deux à deux et S_3 leur produit. On a

$$S_1 = 0,00001,$$
$$S_2 = -0,74998,$$
$$S_3 = -0,14833,$$

et ceci nous montre que cette équation est très voisine de l'équation bien connue

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{\sin A}{4} = 0.$$

19. *Une masse d'air* M $= 10^g$, *de masse spécifique*

$$\mu = 1,293.10^{-3} \text{ C. G. S.},$$

est prise à la température absolue de la glace fondante $T_0 = 273°$, *sous la pression atmosphérique* $p_0 = 1,013.10^6$. C. G. S. *Son volume* v_0 *est réduit par une compression brusque (dite adiabatique). Au cours de cette opération, la température absolue* T, *la pression* p *de la masse considérée, et le travail* W *à fournir*

pour réaliser la compression, sont donnés en fonction de v par les formules

$$Tv^{\gamma-1} = T_0 v_0^{\gamma-1}, \qquad pv^{\gamma} = p_0 v_0^{\gamma},$$

$$W = -\int_{v_0}^{v} p\,dv, \qquad \gamma = 1{,}404.$$

Pour le volume $v = \frac{v_0}{10}$, *calculer, au moyen des tables de logarithmes*, T, p, W *en degrés, atmosphères et joules.*

(*École Polytechnique*, 1918.)

On trouve

$$T = 273.10^{0,404} = 692^{\circ},08,$$
$$p = 1{,}013.10^{6}.10^{1,404} = 25{,}6806 \text{ atmosphères},$$
$$W = \frac{1{,}013.10^{3}}{1{,}293.0{,}404}(10^{0,404} - 1) = 2\,976{,}9 \text{ joules}.$$

20. *Les côtés d'un triangle isocèle, mesurés en mètres, ont pour longueurs a, a et b. L'angle au sommet est* α *grades, et le périmètre* $2p = 20$ *mètres.*

Une quantité A, *fonction de l'angle* α, *est déterminée par la formule*

$$A = 1 - \frac{bL\frac{a}{b} + r\frac{b}{a}}{r + a - b},$$

avec

$$r = 606{,}5 - 0{,}695b.$$

Calculer les valeurs de A *qui correspondent aux valeurs suivantes de* α : 10^g, 15^g, 20^g.

Le symbole L *représente des logarithmes népériens.*

On utilisera des tables de logarithmes à cinq décimales.

Nota. — *Le module de transformation des logarithmes népériens en logarithmes vulgaires est* M = 0,43429.

(*École des Mines de Saint-Étienne*, 1914.)

Nous calculerons la quantité

$$B = \frac{b L \frac{a}{b} + r \frac{b}{a}}{r + a - b},$$

et nous en déduirons

$$A = 1 - B.$$

Les côtés a et b sont définis par les équations

$$b = 2a \sin\frac{\alpha}{2}, \qquad a + \frac{b}{2} = 10.$$

On peut donc écrire

$$r = 606{,}5 - 0{,}695 b = \left(a + \frac{b}{2}\right) 60{,}65 - 0{,}695 b$$

ou

$$r = 60{,}65 a + 29{,}63 b.$$

Si nous remplaçons r par cette valeur dans B, nous obtenons une fonction homogène et de degré zéro par rapport à a et b, et en posant $\frac{a}{b} = x$, B prend la forme

$$B = \frac{x L x + r}{x r'},$$

x, r, r' étant définis par les équations

$$x = \frac{1}{2 \sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$r = 60{,}65 x + 29{,}63,$$

$$r' = r + x - 1.$$

Nous calculerons séparément

$$B' = \frac{Lx}{r'} = \frac{\log x}{M r'},$$

$$B'' = \frac{r}{x r'},$$

$$\log B' = \log \log x - \log M - \log r',$$

$$\log B'' = \log r - \log x - \log r'.$$

1° $\alpha = 10$ grades.

On obtiendra successivement

$$\log x = 0{,}80433, \qquad x = 6{,}3728, \qquad \log\log x = \bar{1}{,}90544,$$

puis

$$\begin{array}{rr} r = 416{,}14, & r' = 421{,}51, \\ \log r = 2{,}61924, & \log r' = 2{,}62481, \\ B' = 0{,}0043939, & B'' = 0{,}15492, \\ B = 0{,}15931, & A = 0{,}84069; \end{array}$$

2° $\alpha = 15$ grades, on a $A = 0{,}76256$;

3° $\alpha = 20$ grades, $A = 0{,}68503$.

21. *Calculer la valeur de l'expression*

$$\frac{a^{2,157} b^{-\frac{1}{7}}}{\operatorname{arc\,tg} \theta (c^3 + a\theta \mathrm{L} b)},$$

dans laquelle on a

$$a = 26, \qquad b = 7{,}432, \qquad c = 0{,}245, \qquad \theta = 0{,}0523.$$

(*Certificat de Mathématiques générales*, *Toulouse*, 1904.)

CHAPITRE II

RÉSOLUTION TRIGONOMÉTRIQUE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ A COEFFICIENTS RÉELS

---

22. Soit l'équation

$$(1) \qquad X^3 + aX^2 + bX + c = 0,$$

où les coefficients a, b, c sont des nombres réels ; nous allons montrer qu'on peut calculer les racines réelles et imaginaires de cette équation au moyen des tables de logarithmes.

Remplaçons d'abord X par $x - \frac{a}{3}$; l'équation transformée n'a pas de terme en x^2 et s'écrit

$$(2) \qquad x^3 + px + q = 0,$$

p et q désignant des nombres réels, faciles à calculer en fonction de a, b, c.

Tout revient à résoudre l'équation (2); les racines de l'équation (1) sont égales aux racines de l'équation (2) diminuées de $\frac{a}{3}$.

On démontre en algèbre que si $4p^3 + 27q^2 < 0$, l'équation (2) a trois racines réelles et distinctes; si $4p^3 + 27q^2 > 0$, elle a une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées; enfin, si $4p^3 + 27q^2 = 0$, l'équation admet une racine double et une racine simple, toutes deux réelles.

Nous allons d'ailleurs retrouver ces résultats dans la résolution trigonométrique.

23. Pour résoudre l'équation (2), nous posons

$$x = y + z,$$

y étant une nouvelle inconnue, et z une fonction de y que nous déterminerons plus loin ; l'équation devient

$$(y+z)^3 + p(y+z) + q = 0,$$

ou

$$y^3 + z^3 + q + (y+z)(3yz+p) = 0.$$

Déterminons z par la relation $3yz + p = 0$, ou $z = -\frac{p}{3y}$, l'équation se réduit à

$$(3) \qquad y^3 + \left(-\frac{p}{3y}\right)^3 + q = 0,$$

ou

$$(4) \qquad y^6 + qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Cette équation peut être résolue par rapport à y^3 ; elle est alors équivalente à l'ensemble des deux équations binomes

$$(5) \qquad \begin{cases} y^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \\ y^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \end{cases}$$

A toute racine y_1 d'une de ces équations binomes correspondent une valeur de z, $z_1 = -\frac{p}{3y_1}$, et une racine de l'équation (2),

$$x_1 = y_1 + z_1, \qquad \text{ou} \qquad x_1 = y_1 - \frac{p}{3y_1}.$$

Or, bien que les équations (5) admettent en général six racines distinctes, il est aisé de voir que l'équation (2) n'admet que trois racines. En effet, si dans l'équation (3) on change y

en $-\frac{p}{3y}$, l'équation ne change pas; par conséquent, à toute racine y_1 de cette équation correspond la racine $-\frac{p}{3y_1}$, et ces deux racines, portées dans l'égalité $x = y - \frac{p}{3y}$, donnent visiblement pour x la même valeur.

Ainsi les racines de l'équation (4) ou des équations (5) peuvent se grouper deux à deux de telle manière que le produit de deux racines de chaque groupe soit égal à $-\frac{p}{3}$. En portant une racine de chaque groupe dans l'expression $y - \frac{p}{3y}$, on obtiendra les trois racines de l'équation (2).

Il importe alors de dire comment on doit choisir les trois racines de l'équation (4) qui, portées dans $y - \frac{p}{3y}$, fourniront les trois racines de (2).

Je dis qu'il suffit de prendre les trois racines d'une des deux équations binomes (5). Pour cela, nous allons montrer que si A désigne une racine quelconque de la première équation binome, $-\frac{p}{3A}$ est racine de la seconde.

Désignons par B une racine quelconque de la deuxième équation binome, les trois racines de cette équation sont B, Bj, Bj^2, j et j^2 désignant les racines cubiques imaginaires de l'unité. D'autre part, A^3 et B^3 sont les racines de l'équation du deuxième degré obtenue en considérant y^3 comme l'inconnue dans l'équation (4); on a donc

$$A^3B^3 = -\frac{p^3}{27},$$

d'où l'on déduit l'*une* des égalités suivantes :

$$AB = -\frac{p}{3}, \qquad ABj = -\frac{p}{3}, \qquad ABj^2 = -\frac{p}{3};$$

par conséquent, l'*un* des nombres B, Bj, Bj^2 est égal à $-\frac{p}{3A}$.

24. Conséquence. — *On obtiendra les racines de l'équation*

$$x^3 + px + q = 0$$

en remplaçant dans l'expression

$$x = y - \frac{p}{3y},$$

y successivement par les trois racines d'une des équations binomes

$$(5)\qquad \begin{cases} y^3 = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}, \\ y^3 = -\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}. \end{cases}$$

25. Premier cas. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ ou $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Les seconds membres des équations (5) sont imaginaires; pour calculer les racines d'une de ces équations, nous mettrons son second membre sous forme trigonométrique.

Les nombres imaginaires conjugués

$$-\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$$

ont même module

$$\rho = \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}; \text{ (*)}$$

les arguments ont même cosinus

$$(\alpha)\qquad \cos\varphi = \frac{-\dfrac{q}{2}}{\sqrt{-\dfrac{p^3}{27}}},$$

et des sinus opposés. Comme il suffit de considérer l'une des équations binomes, on pourra prendre pour φ *un angle quelconque* défini par l'équation (α), et l'équation binome s'écrit

$$y^3 = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

(*) Remarquons que si $4p^3 + 27q^2$ est négatif, p est aussi négatif.

Les trois racines de cette équation sont

$$(6) \qquad y = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right),$$

k recevant trois valeurs consécutives quelconques.

Il ne reste plus qu'à remplacer y par les expressions (6) dans

$$x = y - \frac{p}{3y}.$$

Nous avons d'abord

$$-\frac{p}{3y} = \frac{-\frac{p}{3}}{\sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right]}$$

$$= \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} - i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right],$$

et

$$x = y - \frac{p}{3y} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3}.$$

En donnant à k les valeurs 0, 1, 2, nous obtenons les trois racines de l'équation (2)

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3},$$

$$x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3},$$

φ étant un angle quelconque défini par la relation (α).

Les trois racines sont réelles et distinctes.

26. Remarque. — Si $q < 0$, il existe un angle aigu φ défini par l'équation (α); cet angle sera donné immédiatement par les tables de logarithmes.

Si $q > 0$, le second membre de l'équation (α) est négatif;

on aura une solution de la forme $\pi + \varphi'$, φ' étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Les racines de l'équation (2) peuvent alors s'écrire

$$x = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\pi+\varphi'+2k\pi}{3} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left[\pi + \frac{\varphi'+2(k-1)\pi}{3}\right]$$

ou

$$x = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi'+2k'\pi}{3},$$

k' recevant trois valeurs entières consécutives.

On conclut de là que pour calculer trigonométriquement les racines de l'équation (2), on peut calculer d'abord un angle φ *compris entre* 0 *et* $\frac{\pi}{2}$ et défini par l'égalité

$$\cos\varphi = \frac{\left|\frac{q}{2}\right|}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}},$$

et alors les racines de l'équation (2) seront

$$x_1 = -2\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$x_2 = -2\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi+2\pi}{3},$$

$$x_3 = -2\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi+4\pi}{3},$$

ε étant égal à ± 1 et ayant le signe de q.

27. Deuxième cas. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ ou $4p^3 + 27q^2 > 0$.

Les seconds membres des équations binomes (5) sont réels. Désignons par A la racine cubique réelle de l'un d'eux ; les trois racines de l'équation binome correspondante sont

A, Aj, Aj^2, et les trois racines de l'équation (2) sont alors (24)

$$x_1 = A - \frac{p}{3A},$$

$$x_2 = Aj - \frac{p}{3Aj} = Aj - \frac{p}{3A}j^2,$$

$$x_3 = Aj^2 - \frac{p}{3Aj^2} = Aj^2 - \frac{p}{3A}j,$$

ou, en remplaçant j et j^2 par leurs valeurs, $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= A - \frac{p}{3A}, \\ x_2 &= -\frac{1}{2}\left(A - \frac{p}{3A}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(A + \frac{p}{3A}\right). \\ x_3 &= -\frac{1}{2}\left(A - \frac{p}{3A}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(A + \frac{p}{3A}\right). \end{aligned}\right.$$

On peut remarquer que si A est la racine réelle de l'une des équations binomes, $-\frac{p}{3A}$ est la racine réelle de l'autre; par suite, si $4p^3 + 27q^2 > 0$, A et $-\frac{p}{3A}$ sont différents. On voit alors que x_1 est réelle, et x_2, x_3 sont imaginaires conjuguées.

Pour calculer trigonométriquement ces racines, nous allons rendre calculable par logarithmes le second membre d'une des équations binomes, en appliquant la méthode bien connue (t. I, n° 127) pour rendre calculables les racines d'une équation du deuxième degré.

Nous avons

$$A^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}\right).$$

1° Supposons d'abord $p < 0$. $\frac{4p^3}{27q^2}$ est négatif et moindre que 1 en valeur absolue; on peut donc déterminer au moyen

des tables un angle φ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et tel que l'on ait

$$\sin^2 \varphi = -\frac{4p^3}{27q^2} = \frac{-\frac{p^3}{27}}{\frac{q^2}{4}},$$

ou

$$(\beta) \qquad \sin \varphi = \frac{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}{\left|\frac{q}{2}\right|}.$$

On a alors

$$A^3 = -\frac{q}{2}(1 \pm \cos \varphi).$$

Choisissons maintenant le signe — devant $\cos \varphi$; nous obtenons

$$A^3 = -q \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

D'autre part, de la formule (β) nous tirons

$$q = \frac{2\varepsilon \sqrt{-\frac{p^3}{27}}}{\sin \varphi},$$

($\varepsilon = \pm 1$ et ayant le signe de q), et par suite

$$A^3 = -q \sin^2 \frac{\varphi}{2} = -\varepsilon \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Nous en tirons

$$A = -\varepsilon \sqrt{-\frac{p}{3}} \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}.$$

Posons enfin

$$(\gamma) \qquad \operatorname{tg} \omega = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}},$$

nous avons

$$A = -\varepsilon \sqrt{-\frac{p}{3}} \operatorname{tg} \omega$$

On en déduit

$$-\frac{p}{3A}=\frac{-\frac{p}{3}}{-\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{tg}\omega}=-\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\cot\omega,$$

et

$$A-\frac{p}{3A}=-\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}(\operatorname{tg}\omega+\cot\omega)=-2\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\frac{1}{\sin 2\omega},$$

$$A+\frac{p}{3A}=-\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}(\operatorname{tg}\omega-\cot\omega)=2\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\cot 2\omega.$$

Les trois racines de l'équation (2) sont alors

$$x_1=-2\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\frac{1}{\sin 2\omega},$$

$$x_2,\ x_3=\varepsilon\left[\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\frac{1}{\sin 2\omega}\pm i\sqrt{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\cot 2\omega\right].$$

On commencera par calculer φ au moyen de la formule (β), puis on calculera ω au moyen de la formule (γ).

2° Supposons maintenant $p>0$. Nous déterminons à l'aide des tables un angle φ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et tel que l'on ait

$$\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{4p^3}{27q^2}=\frac{\frac{p^3}{27}}{\frac{q^2}{4}},$$

ou

$$(\beta')\qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{\left|\frac{q}{2}\right|}.$$

Nous avons

$$A^3=-\frac{q}{2}\left(1\pm\frac{1}{\cos\varphi}\right)=-\frac{q}{2}\cdot\frac{\cos\varphi\pm 1}{\cos\varphi},$$

et, en prenant le signe —,

$$A^3=q\,\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}.$$

Remplaçons maintenant q par sa valeur $\dfrac{2\varepsilon\sqrt{\dfrac{p^3}{27}}}{\operatorname{tg}\varphi}$, tirée de la formule ($\beta'$) ($\varepsilon = \pm 1$ et ayant le signe de q), nous obtenons

$$A^3 = \varepsilon\sqrt{\frac{p^3}{27}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \qquad A = \varepsilon\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}},$$

ou, en posant

$$(\gamma') \qquad \operatorname{tg}\omega = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}},$$

$$A = \varepsilon\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{tg}\omega, \qquad -\frac{p}{3A} = -\varepsilon\sqrt{\frac{p}{3}}\cot\omega.$$

On trouve alors que les racines de l'équation (2) peuvent s'écrire

$$x_1 = -2\varepsilon\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\omega,$$

$$x_2,\ x_3 = \varepsilon\left[\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\omega \pm i\sqrt{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\frac{1}{\sin 2\omega}\right].$$

28. Troisième cas. $\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} = 0$, ou $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Les seconds membres des équations binomes (5) sont égaux à $-\dfrac{q}{2}$; on a donc $A = -\dfrac{p}{3A}$, et les trois racines de l'équation (2) deviennent

$$x_1 = 2A, \qquad x_2 = -A, \qquad x_3 = -A;$$

on a une racine double $-A$ et une racine simple $2A$.

La valeur de A est $\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}}$; on peut lui donner une autre forme. En effet, dans la relation $4p^3 + 27q^2 = 0$, remplaçons q par λp, nous obtenons

$$p = -\frac{27\lambda^2}{4} \qquad \text{et} \qquad q = \lambda p = -\frac{27\lambda^3}{4}.$$

Par suite,

$$-\frac{q}{2} = \frac{27\lambda^3}{8}, \qquad A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \frac{3\lambda}{2} = \frac{3q}{2p}.$$

On voit donc que la racine double est égale à $-\frac{3q}{2p}$ et la racine simple à $\frac{3q}{p}$, résultat bien connu.

29. En résumé, voici le tableau des formules à appliquer pour calculer trigonométriquement les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$. Dans toutes ces formules, ε est égal à ± 1 et *a le signe de q*.

I $$4p^3 + 27q^2 < 0.$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|\frac{q}{2}\right|}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}},$$

$$x_1 = -2\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$x_2 = -2\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3},$$

$$x_3 = -2\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3}.$$

II. $$4p^3 + 27q^2 > 0, \qquad p < 0.$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}{\left|\frac{q}{2}\right|}, \qquad \operatorname{tg}\omega = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}},$$

$$x_1 = -2\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\,\frac{1}{\sin 2\omega},$$

$$x_2 = \varepsilon\left[\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\frac{1}{\sin 2\omega} + i\sqrt{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\cot 2\omega\right],$$

$$x_3 = \varepsilon\left[\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\frac{1}{\sin 2\omega} - i\sqrt{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\cot 2\omega\right].$$

III. $4p^3 + 27q^2 > 0, \qquad p > 0.$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{\left|\frac{q}{2}\right|}, \qquad \operatorname{tg}\omega = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}.$$

$$x_1 = -2\varepsilon\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\omega,$$

$$x_2 = \varepsilon\left[\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\omega + i\sqrt{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\frac{1}{\sin 2\omega}\right],$$

$$x_3 = \varepsilon\left[\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\omega - i\sqrt{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\frac{1}{\sin 2\omega}\right],$$

IV. $4p^3 + 27q^2 = 0.$

$$x_1 = x_2 = -\frac{3q}{2p}, \qquad x_3 = \frac{3q}{p}.$$

Remarque. — Dans le cas où p est négatif, il peut se faire qu'on n'aperçoive pas immédiatement le signe de $4p^3 + 27q^2$. Dans ce cas, on commencera par calculer $\log\left|\frac{q}{2}\right|$ et $\log\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$.

Si $\log\left|\frac{q}{2}\right| < \log\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$, $4p^3 + 27q^2$ est négatif, on appliquera les formules I.

Si $\log\left|\frac{q}{2}\right| > \log\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$, $4p^3 + 27q^2$ est positif, on appliquera les formules II.

Le calcul de ces deux logarithmes est d'ailleurs nécessaire pour déterminer la valeur de φ, soit dans les formules I, soit dans les formules II.

30. *Établir les formules* I *en partant de l'équation qui donne* $\cos\frac{a}{3}$ *en fonction de* $\cos a$.

On sait que cette équation est

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{\cos a}{4} = 0;$$

elle admet comme racines $\cos\frac{a}{3}$, $\cos\frac{a+2\pi}{3}$, $\cos\frac{a+4\pi}{3}$.

Si nous y remplaçons x par $\frac{x}{\lambda}$, nous obtenons la nouvelle équation

$$(1) \qquad x^3 - \frac{3\lambda^2}{4}x - \frac{\lambda^3 \cos a}{4} = 0,$$

qui admet les racines

$$(2) \qquad \lambda\cos\frac{a}{3}, \qquad \lambda\cos\frac{a+2\pi}{3}, \qquad \lambda\cos\frac{a+4\pi}{3}.$$

Déterminons alors λ et a de façon que l'équation

$$(3) \qquad x^3 + px + q = 0$$

ait mêmes racines que (1); il faut qu'on ait

$$-\frac{3\lambda^2}{4} = p, \qquad -\frac{\lambda^3\cos a}{4} = q,$$

ou

$$\lambda = -2\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}, \qquad \cos a = \varepsilon\frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}, \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

ou encore, en donnant à ε le signe de q,

$$(4) \qquad \lambda = -2\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}, \qquad \cos a = \frac{\left|\frac{q}{2}\right|}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}.$$

Les racines de l'équation (3) sont alors les nombres (2), où λ et a sont définis par (4).

31. *Résolution trigonométrique de l'équation*

$$144x^3 - 958{,}09x + 847{,}2 = 0.$$

(*École Polytechnique*, 1901.)

Nous avons ici

$$p = -\frac{958{,}09}{144}, \qquad q = \frac{847{,}2}{144},$$

ou

$$-\frac{p}{3} = \frac{958{,}09}{432}, \qquad \frac{q}{2} = \frac{423{,}6}{144}.$$

Nous allons comparer les logarithmes de $\frac{q}{2}$ et de $\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$.

Calcul de $\log\frac{q}{2}$.

$$\log 423{,}6 = 2{,}62696$$
$$-\log 144 = \bar{3}{,}84164$$
$$\log\frac{q}{2} = 0{,}46860$$

Calcul de $\log 958{,}09$.

$\Delta = 4$

9580	98137
9	3,6

$$\log 958{,}09 = 2{,}98141$$

Calcul de $\log\sqrt{-\frac{p}{3}}$ *et* $\log\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$

$$\log 958{,}09 = 2{,}98141$$
$$-\log 432 = \bar{3}{,}36452$$
$$\log\left(-\frac{p}{3}\right) = 0{,}34593$$
$$\log\sqrt{-\frac{p}{3}} = 0{,}17296{,}5$$
$$\log\sqrt{-\frac{p^3}{27}} = 0{,}51889$$

On voit que $\log\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$ est supérieur à $\log\frac{q}{2}$; on en conclut que $4p^3 + 27q^2$ est négatif; par suite l'équation a ses trois racines réelles et distinctes, et elles seront données par les formules suivantes :

$$\cos\varphi = \frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}},$$

$$x_1 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$x_2 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi + 400}{3},$$

$$x_3 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi + 800}{3}.$$

Nous exprimerons les angles en grades.

Calcul de φ.

$$\log\frac{q}{2} = 0{,}46860$$

$$-\log\sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \bar{1}{,}48111$$

$$\log\cos\varphi = \bar{1}{,}94971$$

$$\varphi = 30{,}05$$

$$\frac{\varphi}{3} = 10{,}0167$$

$$\frac{\varphi+400}{3} = \frac{430{,}05}{3} = 143{,}35$$

$$\frac{\varphi+800}{3} = \frac{830{,}05}{3} = 276{,}6833$$

Calcul de $\log\cos\frac{\varphi}{3}$.

$$\frac{\varphi}{3} = 10{,}0167$$

$$\log\cos\frac{\varphi}{3} = \bar{1}{,}99460$$

Calcul de $\log\left|\cos\frac{\varphi+400}{3}\right|$.

$$\frac{\varphi+400}{3} = 200 - 56{,}65$$

$$\log\left|\cos\frac{\varphi+400}{3}\right| = \bar{1}{,}79901$$

Calcul de $\log\left|\cos\frac{\varphi+800}{3}\right|$.

$$\frac{\varphi+800}{3} = 200 + 76{,}6833$$

$\Delta = 18$

76,69		$\bar{1}{,}55391$
	6	10,8
	7	1,26

$$\log\left|\cos\frac{\varphi+800}{3}\right| = \bar{1}{,}55403$$

Calcul de x_1.

$$\log 2 = 0{,}30103$$

$$\log\sqrt{-\frac{p}{3}} = 0{,}17296$$

$$\log\cos\frac{\varphi}{3} = \bar{1}{,}99460$$

$\Delta = 14$

$$\log|x_1| = 0{,}46859$$

0	2941	
9		6

$$x_1 = -2{,}9416$$

Calcul de x_2.

$$\log 2 = 0{,}30103$$

$$\log\sqrt{-\frac{p}{3}} = 0{,}17296$$

$$\log\left|\cos\frac{\varphi+400}{3}\right| = \bar{1}{,}79901$$

$$\log x_2 = 0{,}27300$$

$$x_2 = 1{,}8750$$

Calcul de x_3.

$$\log 2 = 0{,}30103$$

$$\log\sqrt{-\frac{p}{3}} = 0{,}17296$$

$$\log\left|\cos\frac{\varphi+800}{3}\right| = \bar{1}{,}55403$$

$\Delta = 40$

$$\log x_3 = 0{,}02802$$

776	1066
26	6

$$x_3 = 1{,}0666$$

Réponse.

$$x_1 = -2,9416,$$
$$x_2 = +1,8750,$$
$$x_3 = +1,0666,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

32. *Résolution trigonométrique de l'équation*

$$x^3 - 5x + 1 = 0.$$

(*École Polytechnique*, 1900.)

On reconnaît immédiatement que $4p^3 + 27q^2$ est négatif; l'équation a donc trois racines réelles, que l'on calculera par les mêmes formules que dans la question précédente.

On trouve successivement

$$\log \frac{q}{2} = \bar{1},69897, \qquad \log \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = 0,33277,$$
$$\log \cos \varphi = \bar{1},36620, \qquad \varphi = 85^g,0697,$$

puis

$$x_1 = -2,3300,$$
$$x_2 = +2,1284,$$
$$x_3 = +0,2016.$$

33. *Résoudre l'équation*

$$64X^3 - 48X^2 - 180X - 17 = 0.$$

Divisons le premier membre par 64, l'équation prend la forme

$$X^3 - \frac{3}{4}X^2 - \frac{45}{16}X - \frac{17}{64} = 0;$$

puis, posons $X = x + \frac{1}{4}$ (22), nous obtenons

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^3 - \frac{3}{4}\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{45}{16}\left(x + \frac{1}{4}\right) - \frac{17}{64} = 0,$$

ou

$$(1) \qquad x^3 - 3x - 1 = 0;$$

on voit aisément que cette équation a ses trois racines réelles.

En appliquant les formules I, on trouve $\cos\varphi = \frac{1}{2}$; il est alors plus simple de calculer φ en degrés, et les trois racines de l'équation (1) sont

$$x_1 = 2\cos 20^\circ = +1,8794,$$
$$x_2 = 2\cos 140^\circ = -1,5321,$$
$$x_3 = 2\cos 260^\circ = -0,3473.$$

En ajoutant $\frac{1}{4}$, ou 0,25, à ces trois racines, on obtient les trois racines de l'équation proposée :

$$X_1 = +2,1294,$$
$$X_2 = -1,2821,$$
$$X_3 = -0,0973.$$

34. *Résoudre l'équation*

$$27X^3 - 162X^2 + 207X + 83 = 0.$$

On trouve

$$X_1 = -0,3178,$$
$$X_2 = +3,7105,$$
$$X_3 = +2,6073.$$

35. *Dans un demi-cercle de diamètre* AB, *on inscrit trois cordes consécutives* AC, CD, DB.

Sachant que $AC = 2^m$, $CD = 6^m$, $DB = 4^m$, *calculer le rayon du demi-cercle.*

En appliquant le théorème de Ptolémée au quadrilatère ACDB, on trouve que le rayon est racine de l'équation

$$x^3 - 14x - 12 = 0.$$

Cette équation a une seule racine positive, qui convient au problème. Cette racine est égale à 4,1131.

L'équation admet deux autres racines négatives, — 0,9112 et — 3,2019, qui ne conviennent pas.

36. *Calculer les racines de l'équation*

$$X^3 + 6X^2 + 10X - 1 = 0.$$

Posons $X = x - 2$, l'équation devient

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

et sous cette forme, on reconnaît qu'elle a une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées.

On a

$$p = -2, \qquad q = -5.$$

Comme p est négatif, on utilisera les formules II (29), dans lesquelles on prend $\varepsilon = -1$, puisque q est négatif,

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}{\left|\frac{q}{2}\right|}, \qquad \operatorname{tg}\omega = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}},$$

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{\sin 2\omega},$$

$$x_2,\ x_3 = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{\sin 2\omega} \pm i\sqrt{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\cot 2\omega.$$

Calcul de $\log\sqrt{-\frac{p}{3}}$ *et* $\log\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$.

$$-\frac{p}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\log 2 = 0{,}30103$$

$$-\log 3 = \bar{1}{,}52288$$

$$\log\left(-\frac{p}{3}\right) = \bar{1}{,}82391$$

$$\log\sqrt{-\frac{p}{3}} = \bar{1}{,}91195.5$$

$$\log\sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \bar{1}{,}73586$$

Calcul de $\log\left|\frac{q}{2}\right|$.

$$\frac{q}{2} = -\frac{5}{2} = -2{,}5$$

$$\log\left|\frac{q}{2}\right| = 0{,}39794$$

Calcul de φ.

$\log\sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \bar{1},73586$

$-\log\left|\frac{q}{2}\right| = \bar{1},60206$

$\Delta = 30$

$\log\sin\varphi = \bar{1},33792$

83	13,97
9	30

$\varphi = 13,9730$

$\frac{\varphi}{2} = 6,9865$

Calcul de $\log \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

$\Delta = 63$

6,98	$\bar{1},04172$
6	37,8
5	3,15

$\log \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \bar{1},04213$

Calcul de ω.

$\Delta = 18$

$\log \operatorname{tg}\omega = \bar{1},68071$

54	28,45
17	
16,2	9
0,8	4

$\omega = 28,4594$

$2\omega = 56,9188$

Calcul de $\log\sin 2\omega$.

$\Delta = 6$

56,91	$\bar{1},89184$
8	4,8
8	0,48

$\log\sin 2\omega = \bar{1},89189$

Calcul de $\log\cot 2\omega$.

$\Delta = 14$

56,92	$\bar{1},90483$
1	1,4
2	0,28

$\log\cot 2\omega = \bar{1},90485$

Calcul de x_1.

$\log 2 = 0,30103$

$\log\sqrt{-\frac{p}{3}} = \bar{1},91195$

$-\log\sin 2\omega = 0,10811$

$\Delta = 20$

$\log x_1 = 0,32109$

098	2094
11	
10	5
1	5

$x_1 = 2,09455$

Calcul de x_2 *et* x_3.

$\log\sqrt{3} = 0,23856$

$\log\sqrt{-\frac{p}{3}} = \bar{1},91195$

$\log\cot 2\omega = \bar{1},90485$

$\Delta = 38$

$0,05536$

00	1135
36	
34,2	9
1,8	5

$x_2,\ x_3 = -1,04727 \pm 1,13595i.$

Les racines de l'équation proposée sont alors $x_1 - 2$, $x_2 - 2$, $x_3 - 2$.

Réponse.

$$X_1 = 0{,}09455, \qquad X_2, X_3 = -3{,}04727 \pm 1{,}13595i.$$

37. *Résoudre l'équation*

$$x^3 + 18x + 12 = 0.$$

Comme p est positif, nous appliquons les formules III (29), qui deviennent ici

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{6}, \qquad \operatorname{tg}\omega = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}},$$

$$x_1 = -2\sqrt{6}\cot 2\omega, \qquad x_2,\ x_3 = \sqrt{6}\cot 2\omega \pm i\sqrt{3}\sqrt{6}\,\frac{1}{\sin 2\omega}.$$

Calcul de φ.

$\log 6 = 0{,}77815$

$\Delta = 20$

$\log\operatorname{tg}\varphi = 0{,}38908$		
898		75,32
10		50
$\varphi = 75{,}3250$		
$\frac{\varphi}{2} = 37{,}6625$		

Calcul de $\log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

$\Delta = 15$

37,66	$\bar{1}{,}82725$
2	3
5	0,75

$\log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \bar{1}{,}82729$

$\frac{1}{3}\log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \bar{1}{,}94243$

Calcul de ω.

$\Delta = 1[illegible]$

$\log\operatorname{tg}\omega = \bar{1}{,}94243$	
39	45,79
4	
2,8	2
1,2	9

$\omega = 45{,}7929$

$2\omega = 91{,}5858$

Calcul de $\log\cot 2\omega$.

$\Delta = 5[illegible]$

91,59	$\bar{1}{,}12345$
4	20,8
2	1,04

$\log\cot 2\omega = \bar{1}{,}12367$

Calcul de $\log\sin 2\omega$.

$\log\sin 2\omega = \bar{1}{,}99620$

Calcul de x_1.

$$\log 2 = 0{,}30103$$
$$\log\sqrt{6} = 0{,}38908$$
$$\log\cot 2\omega = \bar{1}{,}12367$$
$$\log|x_1| = \bar{1}{,}81378$$
$$x_1 = -0{,}65130$$

Calcul de x_2, x_3.

$$\log\sqrt{3} = 0{,}23856$$
$$\log\sqrt{6} = 0{,}38908$$
$$-\log\sin 2\omega = 0{,}00380$$
$$\log\frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{\sin 2\omega} = 0{,}63144$$
$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{\sin 2\omega} = 4{,}2800$$

Réponse.

$$x_1 = -0{,}65130, \qquad x_2,\ x_3 = -0{,}32565 \pm 4{,}2800i.$$

38. *Résoudre l'équation*

$$x^3 + 3x^2 - 7{,}871x + 8{,}139 = 0.$$

Les racines sont

$$x_1 = -4{,}9310, \qquad x_2,\ x_3 = 0{,}9655 \pm 0{,}8476i.$$

39. *Résoudre l'équation*

$$x^3 - 0{,}45x^2 + 2{,}4149x - 10{,}231985 = 0.$$

Les racines sont

$$x_1 = 1{,}9349, \qquad x_2,\ x_3 = -0{,}74245 \pm 2{,}1764i,$$

40. *On considère l'équation*

$$3\,432x^7 - 12\,012x^6 + 16\,632x^5 - 11\,550x^4 + 4\,200x^3 - 756x^2 + 56x - 1 = 0.$$

Montrer que cette équation a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises entre 0 *et* 1. (Gauss (*).)

En posant $x = y + \frac{1}{2}$, on obtient l'équation

$$y\left(3\,432y^6 - 1\,386y^4 + \frac{345}{2}y^2 - \frac{35}{8}\right) = 0,$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1854, p. 362.

qui admet la racine zéro, donc l'équation proposée admet la racine $\frac{1}{2}$.

Si l'on supprime le facteur y et si l'on pose $y^2 = z$, on est ramené à résoudre une équation du troisième degré, et on peut appliquer la méthode trigonométrique. On obtient ainsi les six racines incommensurables de l'équation proposée :

$$0{,}02544, \quad 0{,}12923, \quad 0{,}29707,$$
$$0{,}70292, \quad 0{,}87076, \quad 0{,}97455.$$

41. *Étant donnée l'équation*

$$(1) \qquad z^4 - z + 1 = 0,$$

1° *Démontrer qu'elle a toutes ses racines imaginaires ;*

2° *Calculer la partie réelle et le coefficient de i pour chacune de ses racines.*

En posant $z = x + yi$, on verra que le problème dépend de la recherche d'une des racines d'une équation du troisième degré ; on calculera cette racine à l'aide des tables trigonométriques avec le degré d'approximation qu'elles comportent.

(*Agrégation*, 1880.)

Il est facile de voir que cette équation n'a aucune racine réelle. D'abord, elle n'a pas de racine négative ; ensuite, en mettant le premier membre sous la forme $z(z^3 - 1) + 1$, on voit que tout nombre positif supérieur à 1 ne peut être racine de l'équation, et en l'écrivant $z^4 + 1 - z$, on voit que tout nombre positif plus petit que 1 ne peut pas non plus être racine.

Il en résulte que l'équation (1) admet quatre racines imaginaires.

Posons $z = x + yi$, x et y étant *réels*, l'équation devient

$$(x + yi)^4 - (x + yi) + 1 = 0,$$

ou

$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - x + 1 + i[4x^3y - 4xy^3 - y] = 0.$$

On doit donc avoir

$$(2) \qquad \begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - x + 1 = 0, \\ y(4x^3 - 4xy^2 - 1) = 0, \end{cases}$$

et il faut chercher les valeurs *réelles* de x et de y vérifiant ces équations.

La seconde donne d'abord $y = 0$, solution inacceptable, puisque l'équation (1) n'a pas de racines réelles. En écartant cette solution, on tire

$$(3) \qquad y^2 = \frac{4x^3 - 1}{4x},$$

et en remplaçant y^2 par cette valeur dans la première équation (2), on obtient, toutes réductions faites,

$$(4) \qquad f(x) \equiv 64x^6 - 16x^2 - 1 = 0,$$

et on est conduit à chercher les valeurs *réelles* de x et y vérifiant les équations (3) et (4).

Le théorème de Descartes montre que l'équation (4) admet une racine positive et une racine négative qui sont d'ailleurs opposées; soit a la positive, $-a$ la négative. Remplaçons x par ces valeurs dans l'équation (4), nous avons

$$y^2 = \frac{4a^3 - 1}{4a}, \qquad y^2 = \frac{4a^3 + 1}{4a},$$

et ces deux équations admettent chacune deux racines réelles opposées, car on voit aisément que a est supérieur à $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Si nous posons

$$b = \sqrt{\frac{4a^3 - 1}{4a}}, \qquad c = \sqrt{\frac{4a^3 + 1}{4a}},$$

les quatre racines imaginaires de l'équation (1) sont

$$a \pm bi \qquad \text{et} \qquad -a \pm ci.$$

Tout revient à calculer a.

Si on considère x^2 comme l'inconnue, l'équation (4) a trois racines réelles, dont une seule est positive, c'est a^2; on peut la calculer à l'aide des formules I (29).

On calculera d'abord l'angle aigu φ défini par l'égalité

$$\cos\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{16},$$

et on aura

$$a = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{\varphi}{3}}.$$

Pour calculer b et c, nous écrirons

$$b = a\sqrt{1 - \frac{1}{4a^3}}, \qquad c = a\sqrt{1 + \frac{1}{4a^3}},$$

et nous calculerons un angle aigu θ, tel que

$$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{1}{4a^3}.$$

Nous avons alors

$$c = \frac{a}{\cos\theta}, \qquad b = c\sqrt{\cos 2\theta}.$$

On trouve ainsi

$$a = 0,72715, \qquad b = 0,43003, \qquad c = 0,93410.$$

Les racines imaginaires de l'équation proposée sont alors

$$0,72715 \pm 0,43003i,$$
$$-0,72715 \pm 0,93410i.$$

42. *Soient deux nombres a et b ayant pour logarithmes décimaux*

$$\log a = 0,23509, \qquad \log b = 0,43429.$$

1° *Calculer les angles* α *et* β *compris entre* $-\frac{\pi}{2}$ *et* $+\frac{\pi}{2}$ *définis par les formules*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2a}{3b}\sqrt{\frac{a}{3}}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

2° *Calculer les quantités*

$$x=\sqrt{\frac{a}{3}}\cot 2\beta; \qquad y=\frac{\sqrt{a}}{\sin 2\beta}.$$

3° *Calculer le module* ρ et *l'argument* φ *de l'imaginaire*

$$x+yi=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi), \qquad (i^2=-1)$$

et calculer $\rho^3\cos 3\varphi$ *et* $\rho^3\sin 3\varphi$.

4° *Calculer la valeur que prend l'expression*

$$f(X)=X^3+1{,}71828X+2{,}71828,$$

quand on y remplace X *par la quantité*

$$x+yi=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

précédemment calculée (3°).

(*École des Mines de Saint-Étienne*, 1920.)

Résultats.

1°	$\alpha=19^g{,}6546$,	$\beta=31^g{,}4156$,
2°	$x=0{,}5$,	$y=1{,}57104$,
3°	$\rho=1{,}64869$,	$\varphi=80^g{,}3843$,
	$\rho^3\cos 3\varphi=-3{,}57733$,	$\rho^3\sin 3\varphi=-2{,}69938$.

4° $f(X)$ prend la valeur

$$0{,}00009+0{,}00012i,$$

valeur sensiblement nulle.

On peut d'ailleurs remarquer que les coefficients du polynome $f(X)$ sont précisément les nombres envisagés a et b, et qu'on peut écrire

$$f(X)\equiv X^3+aX+b;$$

si l'on compare les formules données dans l'énoncé en 1° et 2° aux formules III du n° 29, on voit que le nombre calculé $x+yi$ est une des racines imaginaires de l'équation $f(X)=0$.

On doit donc avoir $f(x+yi)=0$.

Remarquons enfin qu'on a

$$f(\mathrm{X}) \equiv \mathrm{X}^3+(b-1)\mathrm{X}+b \equiv (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+b),$$

et que les racines imaginaires du trinome $\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+b$ peuvent se calculer directement; elles sont égales à

$$\frac{1}{2} \pm i\sqrt{b-\frac{1}{4}}, \qquad \text{ou} \qquad 0{,}5 \pm i\sqrt{2{,}46828},$$

ou encore, en calculant $\sqrt{2{,}46828}$ au moyen des logarithmes, à

$$0{,}5 \pm 1{,}57108i.$$

C'est une vérification des résultats précédents.

43. *Résolution de l'équation*

$$f(x) \equiv x^3+x^2-10x-8=0.$$

On pose $x=\dfrac{ay-1}{3}$, $a=2\sqrt{31}$, *et on obtient l'équation en* y

$$y^3-\frac{3}{4}y-\frac{d}{4}=0, \qquad d=\frac{124}{2\sqrt{31^3}}.$$

En posant enfin $d=\cos\alpha$, *les racines de l'équation en* y *sont*

$$y_1=\cos\frac{\alpha}{3}, \qquad y_2=\cos\frac{\alpha+2\pi}{3}, \qquad y_3=\cos\frac{\alpha+4\pi}{3}.$$

1° *Calculer* y_1, y_2, y_3 *et les racines correspondantes de l'équation proposée* x_1, x_2, x_3.

2° *Vérification : calculer* $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, $x_1+x_2+x_3$, $x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2$, $x_1x_2x_3$.

(*École Navale*, 1920.)

CHAPITRE III

CALCULS A LA RÈGLE

---

44. *Calculer, au moyen de la règle à calcul :*

1° *Les onze premiers termes* $u_1, u_2, \ldots, u_{11}$ *de la série qui a pour terme général*

$$u_n = \frac{\sqrt{26\,300}}{(20n+295)\sqrt{20n+32}};$$

2° *Les plus petits angles positifs ayant respectivement pour tangentes les onze premiers termes* $t_1, t_2, \ldots, t_{11}$ *de la série qui a pour terme général*

$$t_n = \sqrt{\frac{20n+22}{263}}.$$

(*École Centrale*, 1914.)

1° On peut simplifier u_n et écrire

$$u_n = \frac{\sqrt{263}}{(4n+59)\sqrt{5n+8}}.$$

On en déduit

$$u_1 = \frac{\sqrt{263}}{63\sqrt{13}} = \frac{1}{63}\sqrt{\frac{263}{13}} = \frac{\sqrt{\frac{2,63}{1,3}\times 10}}{6,3} \times \frac{1}{10}.$$

Nous plaçons le nombre 1,3 de la première échelle supérieure de la réglette au-dessous du nombre 2,63 de la deuxième échelle supérieure de la règle ; l'indice de gauche de

la réglette est alors placé au-dessus du nombre $\sqrt{\frac{2,63}{1,3}\times 10}$ de l'échelle inférieure de la règle. Nous repérons ce nombre au moyen du curseur, puis nous amenons sur le trait du curseur le nombre 6,3 de l'échelle inférieure de la réglette et nous lisons le nombre 7,14 sur l'échelle inférieure de la règle, au-dessous de l'indice de droite de la réglette. Nous avons alors

$$\frac{\sqrt{\frac{2,63}{1,3}\times 10}}{6,3}=0,714,$$

puisque nous avons lu le quotient sous l'indice de droite, et nous en tirons $u_1=0,0714$.

Nous opérons de la même manière pour tous les termes de la série et nous obtenons

$$u_1=\frac{\sqrt{263}}{63\sqrt{13}}=0,0714, \qquad u_2=\frac{\sqrt{263}}{67\sqrt{18}}=0,0571,$$

$$u_3=\frac{\sqrt{263}}{71\sqrt{23}}=0,0476, \qquad u_4=\frac{\sqrt{263}}{75\sqrt{28}}=0,0409,$$

$$u_5=\frac{\sqrt{263}}{79\sqrt{33}}=0,0357, \qquad u_6=\frac{\sqrt{263}}{83\sqrt{38}}=0,0317,$$

$$u_7=\frac{\sqrt{263}}{87\sqrt{43}}=0,0284, \qquad u_8=\frac{\sqrt{263}}{91\sqrt{48}}=0,0257,$$

$$u_9=\frac{\sqrt{263}}{95\sqrt{53}}=0,0235, \qquad u_{10}=\frac{\sqrt{263}}{99\sqrt{58}}=0,0215,$$

$$u_{11}=\frac{\sqrt{263}}{103\sqrt{63}}=0,0198.$$

2° Première méthode. — On calcule d'abord les valeurs de t_1, t_2, ..., t_{11}. Nous avons

$$t_1=\sqrt{\frac{42}{263}}=\sqrt{\frac{4,2}{2,63\times 10}};$$

pour obtenir la valeur de t_1, nous amenons le nombre 2,63

de la première échelle supérieure de la réglette au-dessous du nombre 4,2 de la deuxième échelle supérieure de la règle, et nous lisons la valeur de t_1 sur l'échelle inférieure de la règle, au-dessous de l'indice de gauche de la réglette. Nous obtenons ainsi $t_1 = 0,399$, et, d'une manière analogue,

$$t_2 = \sqrt{\frac{62}{263}} = 0,486, \qquad t_3 = \sqrt{\frac{82}{263}} = 0,558.$$

A partir de $t_4 = \sqrt{\frac{102}{263}} = \sqrt{\frac{1,02}{2,63}}$, il faut amener le 2,63 de la première échelle supérieure de la réglette au-dessous du nombre 1,02 de la première échelle supérieure de la règle, et lire la valeur de t_4 au-dessous de l'indicateur de droite de la réglette sur l'échelle inférieure de la règle, et de même pour $t_5, t_6, \ldots, t_{11}$.

Nous lisons ainsi

$$t_4 = \sqrt{\frac{102}{263}} = 0,623, \qquad t_5 = \sqrt{\frac{122}{263}} = 0,681,$$
$$t_6 = \sqrt{\frac{142}{263}} = 0,735, \qquad t_7 = \sqrt{\frac{162}{263}} = 0,785,$$
$$t_8 = \sqrt{\frac{182}{263}} = 0,832, \qquad t_9 = \sqrt{\frac{202}{263}} = 0,876,$$
$$t_{10} = \sqrt{\frac{222}{263}} = 0,919, \qquad t_{11} = \sqrt{\frac{242}{263}} = 0,959.$$

Cela fait, pour avoir les angles $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ qui ont pour tangentes $t_1, t_2, \ldots, t_{11}$, nous faisons coïncider l'échelle des tangentes avec la graduation supérieure de la règle. Nous prenons les valeurs $t_1, t_2, \ldots$ sur la règle (deuxième échelle supérieure) et nous lisons au-dessous les angles correspondants.

Nous obtenons ainsi :

$$x_1 = 21^\circ 45', \qquad x_2 = 25^\circ 55', \qquad x_3 = 29^\circ 10',$$
$$x_4 = 31^\circ 55', \qquad x_5 = 34^\circ 15', \qquad x_6 = 36^\circ 20',$$
$$x_7 = 38^\circ 10', \qquad x_8 = 39^\circ 45', \qquad x_9 = 41^\circ 15',$$
$$x_{10} = 42^\circ 35', \qquad x_{11} = 43^\circ 50'.$$

Deuxième méthode. — On peut calculer les inverses θ_p des nombres t_p, et chercher les angles qui ont pour cotangentes les diverses valeurs de θ_p. Car le calcul des θ se fait plus simplement que celui des t; on commence par repérer au moyen du curseur le nombre 2,63 de la deuxième échelle supérieure de la règle, et on fait défiler successivement sous ce nombre les nombres 4,2, 6,2, 8,2, de la première échelle supérieure de la réglette, puis les nombres 1,02, 1,22, ..., 2,42, de la deuxième échelle supérieure de la réglette. On lit la valeur des θ sur l'échelle inférieure de la règle au-dessous de l'indice de gauche de la réglette. On trouve ainsi

$$\begin{array}{lll} \theta_1 = 2{,}50, & \theta_2 = 2{,}06, & \theta_3 = 1{,}79, \\ \theta_4 = 1{,}605, & \theta_5 = 1{,}47, & \theta_6 = 1{,}36, \\ \theta_7 = 1{,}274, & \theta_8 = 1{,}202, & \theta_9 = 1{,}141, \\ \theta_{10} = 1{,}09, & \theta_{11} = 1{,}042. & \end{array}$$

Pour obtenir les angles correspondants, on fait coïncider l'échelle des sinus avec la graduation supérieure de la règle; on prend les valeurs de θ sur la première échelle supérieure de la règle, et au moyen du curseur on lit l'angle correspondant sur l'échelle des tangentes, qui se présente à l'envers.

La lecture est beaucoup plus aisée que dans la première méthode.

45. *On donne :*

$$a = 223, \qquad b = 283, \qquad c = 324, \qquad m = 830.$$

Calculer au moyen de la règle à calcul :

1° *Les nombres r, u, v, w définis par*

$$r = \sqrt{\frac{abc}{m}}, \quad u = \sqrt{\frac{mbc}{a}}, \quad v = \sqrt{\frac{mca}{b}}, \quad w = \sqrt{\frac{mab}{c}};$$

les cubes r^3, u^3, v^3, w^3 et les inverses $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, $\frac{1}{w}$ de ces quatre nombres;

2° *Les plus petits angles positifs x, y, z tels que*

$$\operatorname{tg} x = \frac{r}{a}, \qquad \operatorname{tg} y = \frac{r}{b}, \qquad \operatorname{tg} z = \frac{r}{c};$$

3° *Les sinus et cosinus de ces trois angles x, y, z.*

(*École Centrale*, 1913.)

1° Nous simplifierons le calcul en posant

$$s = \sqrt{mabc},$$

ce qui nous donne

$$r = \frac{s}{m}, \qquad u = \frac{s}{a}, \qquad v = \frac{s}{b}, \qquad w = \frac{s}{c}.$$

Nous calculerons d'abord le produit $p = mabc$. Nous en déduirons la valeur de $s = \sqrt{p}$, et, en divisant ce nombre successivement par m, a, b, c, nous obtiendrons les valeurs de r, u, v, w.

Remplaçons les nombres m, a, b, c par des nombres compris entre 1 et 10, en posant

$$m' = \frac{m}{100} = 8{,}3, \qquad a' = \frac{a}{100} = 2{,}23,$$

$$b' = \frac{b}{100} = 2{,}83, \qquad c' = \frac{c}{100} = 3{,}24.$$

Nous avons alors

$$p = 10^8 m'a'b'c', \qquad \text{et} \qquad s = \sqrt{p} = 10^4 \sqrt{m'a'b'c'}.$$

Pour calculer le produit $m'a'b'c'$, nous nous servons des *échelles inférieures* de la règle et de la réglette, afin d'avoir plus d'approximation.

Nous amenons successivement l'indice de droite de la réglette sur le nombre 8,3 de la règle; puis, le trait du curseur sur le nombre 2,23 de la réglette; ensuite, l'indice de gauche de la réglette sur le trait du curseur; celui-ci sur le nombre 2,83 de la réglette; enfin, l'indice de droite de la réglette sur le trait du curseur.

Nous lisons alors le produit $m'a'b'c'$ (à une puissance de 10 près) sur la règle au-dessous du nombre 3,24 de la réglette. Cette lecture donne 1,69, et comme nous avons utilisé deux fois l'indice de droite de la réglette, nous avons

$$m'a'b'c' = 1{,}69 \times 10^2 = 169;$$

nous en tirons immédiatement

$$\sqrt{m'a'b'c'} = 13, \qquad \text{et} \qquad s = \sqrt{p} = 13 \times 10^4 = 1{,}3 \times 10^5.$$

Nous avons alors

$$r = \frac{1{,}3 \times 10^5}{8{,}3 \times 10^2} = \frac{1{,}3}{8{,}3} \times 10^3, \qquad u = \frac{1{,}3}{2{,}23} \times 10^3,$$

$$v = \frac{1{,}3}{2{,}83} \times 10^3, \qquad w = \frac{1{,}3}{3{,}24} \times 10^3.$$

Nous calculons le quotient $\frac{1{,}3}{8{,}3}$ en amenant le nombre 8,3 de l'échelle inférieure de la réglette sur le nombre 1,3 de l'échelle inférieure de la règle ; et nous lisons le quotient (toujours à une puissance de 10 près) sur l'échelle inférieure de la règle au-dessous de l'indice de droite de la réglette. Nous lisons 1,57, mais comme nous utilisons l'indice de droite de la réglette, le véritable quotient est 0,157, et nous avons $r = 157$.

On obtient de même

$$u = 583, \qquad v = 460, \qquad w = 402.$$

Pour obtenir r^3, on peut opérer de deux manières : 1° on calcule le produit $1{,}57 \times 1{,}57 \times 1{,}57$ en se servant des échelles inférieures de la règle et de la réglette, comme nous l'avons indiqué pour le produit $m'a'b'c'$; 2° on peut aussi calculer $(1{,}57)^2 \times 1{,}57$. Pour cela, on place l'indicateur de gauche de la réglette sur le nombre 1,57 de l'échelle inférieure de la règle ; alors cet indice se trouve au-dessous du nombre $(1{,}57)^2$ de la première échelle supérieure de la règle. On lit alors le produit $(1{,}57)^2 \times 1{,}57$ sur la première échelle

supérieure de la règle au-dessus du nombre 1,57 de la première échelle supérieure de la réglette. Les deux procédés nous donnent $(1{,}57)^3 = 3{,}87$ et par suite $r^3 = 3{,}87 \times 10^6$.

La première méthode exige deux mouvements de réglette, et la deuxième un seul; mais la première permet de lire le résultat avec plus de facilité.

Nous obtenons d'une manière analogue

$$u^3 = 198 \times 10^6, \qquad v^3 = 97{,}3 \times 10^6, \qquad w^3 = 65 \times 10^6.$$

Nous calculons maintenant $\frac{1}{r}$ en plaçant le nombre 1,57 de l'échelle inférieure de la réglette au-dessus de l'indice de gauche de l'échelle inférieure de la règle, et nous lisons le quotient sur l'échelle inférieure de la règle au-dessous de l'indice de droite de la réglette. Nous avons ainsi $\frac{1}{1{,}57} = 0{,}637$ et $r = 0{,}00637$; puis, d'une façon analogue,

$$\frac{1}{u} = 0{,}00171, \qquad \frac{1}{v} = 0{,}00217, \qquad \frac{1}{w} = 0{,}00249.$$

2° Nous avons

$$\operatorname{tg} x = \frac{r}{a} = \frac{157}{223} = \frac{1{,}57}{2{,}23};$$

pour calculer l'angle x, nous amenons le nombre 2,23 de la première échelle supérieure de la réglette au-dessous du nombre 1,57 de la première échelle supérieure de la règle; nous retournons l'instrument bout à bout et nous lisons l'angle x sur l'échelle des tangentes au trait de l'échancrure de gauche. Nous trouvons ainsi $x = 35^\circ\,10'$, et par la même méthode

$$y = 29^\circ, \qquad z = 25^\circ\,50'.$$

Pour calculer les sinus et les cosinus de ces angles, nous faisons coïncider l'échelle des sinus située au verso de la

réglette avec l'échelle supérieure de la règle, et nous lisons sans difficulté

$$\sin 35^\circ\,10' = 0{,}575, \qquad \sin 29^\circ = 0{,}485, \qquad \sin 25^\circ\,50' = 0{,}436,$$

puis

$$\cos x = \sin 54^\circ\,50' = 0{,}817, \qquad \cos y = \sin 61^\circ = 0{,}875,$$
$$\cos z = \sin 64^\circ\,10' = 0{,}900.$$

Résultats.

$r = 157,$	$r^3 = 387 \times 10^4,$	$\frac{1}{r} = 0{,}00637,$
$u = 583,$	$u^3 = 198 \times 10^6,$	$\frac{1}{u} = 0{,}00171,$
$v = 460,$	$v^3 = 973 \times 10^5,$	$\frac{1}{v} = 0{,}00217,$
$w = 402,$	$w^3 = 65 \times 10^6,$	$\frac{1}{w} = 0{,}00249,$
$x = 35^\circ\,10',$	$y = 29^\circ,$	$z = 25^\circ\,50',$
$\sin x = 0{,}575,$	$\sin y = 0{,}485,$	$\sin z = 0{,}436,$
$\cos x = 0{,}817,$	$\cos y = 0{,}875,$	$\cos z = 0{,}900.$

Vérification.

On peut remarquer que r, u, v, w sont les rayons des cercles inscrit et exinscrits au triangle dont le demi-périmètre est m et dont les côtés sont égaux à $m - a$, $m - b$, $m - c$, et que x, y, z sont les demi-angles de ce même triangle. On en déduit les vérifications suivantes :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w},$$

$$x + y + z = 90^\circ.$$

46. *Au moyen de la règle à calcul, calculer :*

1° *les nombres*

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \qquad y = \sqrt{2 + x}, \qquad z = \sqrt{2 + y},$$

$$t = \frac{4\sqrt{2}}{x}, \qquad u = \frac{2t}{y}, \qquad v = \frac{2u}{z},$$

que l'on rencontre dans le calcul de π;

2° *les angles* A, B, C, *et les côtés* a, b *d'un triangle sachant que*

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{22}{31}, \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{21}{34}, \qquad c = 296,$$

$$A + B + C = 2 \text{ droits}, \qquad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

On vérifiera que

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{a + b - c}{a + b + c}.$$

(*École Centrale*, 1920.)

1° On a $x = \sqrt{3,414}$, et la racine carrée de 3,414 se lit sur l'échelle inférieure de la règle au-dessous du nombre 3,414 de la première échelle supérieure de la règle. On lit $x = 1,848$. De même,

$$y = \sqrt{3,848} = 1,96, \qquad z = \sqrt{3,96} = 1,99.$$

Pour calculer t, il faut diviser $4\sqrt{2}$ par x. Nous amenons l'indice de gauche de la réglette au-dessous du nombre 2 de la première échelle supérieure de la règle, puis nous portons le trait du curseur sur le nombre 4 de l'échelle inférieure de la réglette. Ce trait indique alors le produit $4\sqrt{2}$ sur l'échelle inférieure de la règle. Nous portons sur ce trait le nombre $x = 1,848$ de l'échelle inférieure de la réglette, et nous lisons le quotient $4\frac{\sqrt{2}}{x}$ sur l'échelle inférieure de la règle au-dessous de l'indice de gauche de la réglette.

Nous obtenons $t=3{,}06$, et, d'une manière analogue,

$$u=\frac{6{,}12}{1{,}96}=3{,}12, \qquad v=\frac{6{,}24}{1{,}99}=3{,}14.$$

2° On peut écrire

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{2{,}2}{3{,}1}, \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{2{,}1}{3{,}4},$$

et on obtient les angles $\frac{A}{2}$ et $\frac{B}{2}$, comme nous avons obtenu l'angle x dans l'exercice précédent (45).

On trouve

$$\frac{A}{2}=35^\circ\,20', \qquad \frac{B}{2}=31^\circ\,40',$$

d'où

$$A=70^\circ\,40', \qquad B=63^\circ\,20', \qquad A+B=134^\circ, \qquad C=46^\circ.$$

On a

$$a=\frac{c}{\sin C}\cdot\sin A, \qquad b=\frac{c}{\sin C}\cdot\sin B.$$

Nous portons l'angle $C=46^\circ$ de l'échelle des sinus au-dessous du nombre $\frac{c}{100}=2{,}96$ de la première échelle supérieure de la règle; puis, sur cette même échelle, nous lisons $\frac{a}{100}$ et $\frac{b}{100}$ respectivement au-dessus des angles $A=70^\circ\,40'$ et $B=63^\circ\,20'$ de l'échelle des sinus.

Nous obtenons

$$a=389, \qquad b=369.$$

Vérification.

$$\frac{a+b-c}{a+b+c}=\frac{462}{1\,054}=\frac{231}{527}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{22\times 21}{31\times 34}=\frac{11\times 21}{31\times 17}=\frac{231}{527}.$$

Résultats.

1° $x = 1{,}848$, $y = 1{,}96$, $z = 1{,}99$,
$t = 3{,}06$, $u = 3{,}12$, $v = 3{,}14$.

2° $A = 70^\circ\,40'$, $B = 63^\circ\,20'$, $C = 46^\circ$,
$a = 389$, $b = 369$.

47. *Calculer, au moyen de la règle à calcul, les angles* A, B, C, *les côtés* a, b, c *et les hauteurs* h, k, l *d'un triangle, sachant que*

$$\operatorname{tg} A = \sqrt{\frac{313}{241}}, \qquad \operatorname{tg} B = \sqrt{\frac{683}{241}}, \qquad a = \sqrt{\frac{863}{89}},$$

et connaissant les formules

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$
$$ah = bk = cl = bc \sin A.$$

On calculera ensuite les six quantités $a\cos B$, $a\cos C$, $b\cos C$, $b\cos A$, $c\cos A$, $c\cos B$, *et le rapport* $\frac{a\cos B}{b\cos A}$, *et on vérifiera que ce rapport est égal à* $\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}$.

(*Ecole Centrale*, 1914.)

Comme tg A et tg B sont supérieures à 1, les angles A et B sont supérieurs à 45° et ne figurent pas sur l'échelle des tangentes. Nous calculerons les compléments de ces angles. Nous avons

$$\operatorname{tg}(90^\circ - A) = \sqrt{\frac{2{,}41}{3{,}13}}.$$

Nous amenons le nombre 3,13 de la première échelle supérieure de la réglette au-dessus du nombre 2,41 de la première échelle de la règle, et nous lisons la valeur de tg (90° — A) sur

l'échelle inférieure de la règle au-dessous de l'indice de droite de la réglette. Nous avons ainsi

$$\operatorname{tg}(90^\circ - A) = 0,877 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg}(90^\circ - B) = \sqrt{\frac{2,41}{6,83}} = 0,594,$$

d'où nous déduisons, au moyen de l'échelle des tangentes,

$$90^\circ - A = 41^\circ 15', \qquad 90^\circ - B = 30^\circ 45',$$
$$A = 48^\circ 45', \qquad B = 59^\circ 15',$$
$$A + B = 108^\circ, \qquad C = 72^\circ.$$

Pour calculer a, nous amenons le nombre 8,9 de la première échelle supérieure de la réglette au-dessous du nombre 8,63 de la deuxième échelle supérieure de la règle, et nous lisons la valeur de a sur l'échelle inférieure de la règle au-dessous de l'indice de gauche de la réglette.

Nous obtenons $a = 3,11$.

Nous avons maintenant

$$b = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin B, \qquad c = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin C.$$

Nous portons l'angle $A = 48^\circ 45'$ de l'échelle des sinus au-dessous du nombre $a = 3,11$ de la première échelle supérieure de la règle ; puis, sur cette même échelle nous lisons b et c respectivement au-dessus des angles $B = 59^\circ 15'$ et $C = 72^\circ$ de l'échelle des sinus : ceci nous donne

$$b = 3,56, \qquad c = 3,94.$$

Pendant que l'échelle des sinus coïncide avec la graduation de la règle, nous lisons la valeur de sin A,

$$\sin A = 0,751,$$

qui est fort utile pour repérer le produit $bc \sin A$ sur l'échelle inférieure de la règle au moyen du curseur.

Nous divisons successivement ce produit par a, b, c, et nous obtenons

$$h = 3,38, \qquad k = 2,96, \qquad l = 2,67.$$

Pour calculer les produits $a \cos B$ et $a \cos C$, ou $a \sin(90° - B)$ et $a \sin(90° - C)$, nous faisons glisser l'échelle des sinus contre la graduation supérieure de la règle et nous amenons l'indice de droite de la réglette au-dessous du nombre $a = 3{,}11$ de la deuxième échelle supérieure de la règle, et nous lisons les produits $a \cos B$ et $a \cos C$ sur la graduation supérieure de la règle au-dessus des angles $90° - B = 30° 45'$ et $90° - C = 18°$.

Comme 18° tombe sur la première échelle supérieure de la règle, il faut diviser le nombre lu par 10.

On trouve ainsi

$$a \cos B = 1{,}59, \qquad a \cos C = 0{,}96,$$

et, d'une manière analogue,

$$b \cos C = 1{,}10, \qquad b \cos A = 2{,}35,$$
$$c \cos A = 2{,}60, \qquad c \cos B = 2{,}01.$$

Vérification.

On a

$$\frac{a \cos B}{b \cos A} = \frac{1{,}59}{2{,}35}, \qquad \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \sqrt{\frac{3{,}13}{6{,}83}},$$

amenons le nombre 2,35 de l'échelle inférieure de la réglette au-dessus du nombre 1,59 de l'échelle inférieure de la règle. Nous pourrions lire ainsi le quotient $\frac{1{,}59}{2{,}35}$, mais c'est inutile. Il suffit de remarquer que dans cette position, le nombre 3,13 de la première échelle supérieure de la règle est au-dessus du nombre 6,83 de la première échelle supérieure de la réglette. On en conclut que l'on a

$$\frac{a \cos B}{b \cos A} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}.$$

Résultats.

$A = 48^\circ 45'$,	$B = 59^\circ 15'$,	$C = 72^\circ$,
$a = 3{,}11$,	$b = 3{,}56$,	$c = 3{,}94$,
$h = 3{,}38$,	$k = 2{,}96$,	$l = 2{,}67$,
$a \cos B = 1{,}59$,	$a \cos C = 0{,}96$,	$b \cos C = 1{,}10$,
$b \cos A = 2{,}35$,	$c \cos A = 2{,}60$,	$c \cos B = 2{,}01$.

48. *Dans la formule*

$$f(\lambda, \theta) = \frac{A\lambda^{-5}}{e^{\frac{B}{\lambda\theta}} - 1}, \qquad \left\{ \begin{array}{l} e = 2{,}718, \\ A = 1{,}09 \times 10^4, \\ B = 1{,}46 \times 10^4. \end{array} \right.$$

les variables λ *et* θ *prennent respectivement les valeurs suivantes :*

λ	0,	1,	2,	3,	4,	5,
θ	0,	1 000,	2 000,	3 000.		

Calculer les valeurs de $f(\lambda, \theta)$ *pour les* $6 \times 4 = 24$ *combinaisons des valeurs des variables, à l'approximation de la règle à calcul.*

N. B. — La formule est celle de l'émission calorifique des radiations de longueur d'onde λ *dans le spectre d'un corps noir porté à la température* θ.

(*Ecole Polytechnique*, 1917.)

Remarquons d'abord que si λ ou θ tend vers zéro par valeurs positives, la fonction $f(\lambda, \theta)$ tend aussi vers zéro ; par conséquent, il suffit de considérer les valeurs non nulles de λ et θ, ce qui donne seulement $5 \times 3 = 15$ combinaisons.

Nous plaçons dans le tableau I à double entrée les valeurs du produit λθ.

I. Valeurs de $\lambda\theta$.

	$\lambda=1$	$\lambda=2$	$\lambda=3$	$\lambda=4$	$\lambda=5$
$\theta=10^3$	10^3	2.10^3	3.10^3	4.10^3	5.10^3
$\theta=2.10^3$	2.10^3	4.10^3	6.10^3	8.10^3	10^4
$\theta=3.10^3$	3.10^3	6.10^3	9.10^3	12.10^3	15.10^3

Nous divisons maintenant $B=1,46\times10^4$ par les nombres du tableau I (ces divisions peuvent se faire sans la règle); puis, nous plaçons dans le tableau II les valeurs de $\frac{B}{\lambda\theta}$.

II. Valeurs de $\frac{B}{\lambda\theta}$.

	$\lambda=1$	$\lambda=2$	$\lambda=3$	$\lambda=4$	$\lambda=5$
$\theta=10^3$	14,6	7,3	4,87	3,65	2,92
$\theta=2.10^3$	7,3	3,65	2,43	1,825	1,46
$\theta=3.10^3$	4,87	2,43	1,62	1,22	0,97

Il s'agit maintenant de calculer $e^{\frac{B}{\lambda\theta}}$; pour cela, nous prenons les logarithmes et nous avons

$$\log e^{\frac{B}{\lambda\theta}}=\frac{B}{\lambda\theta}\log e=\frac{B}{\lambda\theta}.0,434.$$

Nous multiplions alors les nombres du tableau II par 0,434. Le calcul se fait très rapidement en repérant le nombre 0,434 de l'échelle inférieure de la règle au moyen du curseur, et en amenant sur le trait du curseur l'indice de la réglette.

Nous obtenons ainsi le tableau III.

III. Valeurs de $\log e^{\frac{B}{\lambda\theta}}$.

	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$
$\theta = 10^3$	6,34	3,17	2,11	1,584	1,267
$\theta = 2.10^3$	3,17	1,584	1,055	0,79	0,634
$\theta = 3.10^3$	2,11	1,055	0,703	0,529	0,421

Au moyen de l'échelle logarithmique nous obtenons facilement les nombres qui ont pour logarithmes les nombres du tableau III, et en retranchant l'unité des nombres obtenus, nous formons le tableau IV.

IV. Valeurs de $e^{\frac{B}{\lambda\theta}} - 1$.

	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$
$\theta = 10^3$	219.10^4	1 479	128	37,4	17,5
$\theta = 2.10^3$	1 479	37,4	10,35	5,17	3,3
$\theta = 3.10^3$	128	10,35	4,05	2,38	1,64

Pour calculer $f(\lambda, \theta)$, il faut diviser $A = 1,09 \times 10^4$ par $\lambda^5\left(e^{\frac{B}{\lambda\theta}} - 1\right)$. Les valeurs de λ^5 sont

1 32 243 1 024 3 125.

Nous amenons le nombre λ^5 de l'échelle inférieure de la réglette au-dessus du nombre A de l'échelle inférieure de la règle, et nous plaçons le trait du curseur sur l'indice de la réglette. Ce trait indique le nombre $\frac{A}{\lambda^5}$ (à une puissance de 10 près); puis, nous amenons successivement sur le trait du curseur les nombres du tableau IV (pris sur l'échelle inférieure de la réglette) qui correspondent à la valeur de λ considérée, et nous lisons le résultat sur l'échelle inférieure de la règle au-dessous de l'indice de la réglette.

Il faut déterminer avec précision la puissance de 10 par laquelle on doit multiplier le nombre ainsi lu pour obtenir $f(\lambda, \theta)$.

Par exemple, considérons l'ensemble de valeurs $\lambda = 3$, $\theta = 10^3$; nous avons

$$e^{\frac{B}{\lambda\theta}} - 1 = 128 \quad \text{et} \quad f(\lambda, \theta) = \frac{A}{243 \times 128}.$$

Nous amenons le nombre 2,43 de l'échelle inférieure de la réglette au-dessus du nombre 1,09 de l'échelle inférieure de la règle, et nous plaçons le trait du curseur sur l'indice de la réglette. Ce trait indique le nombre $\frac{1,09}{2,43} \times 10$, puisqu'on a utilisé l'indice de droite.

Nous portons maintenant le nombre 1,28 de la réglette sur le trait du curseur, et nous lisons le quotient 3,5 au-dessous de l'indice de gauche. On a donc

$$\frac{\frac{1,09}{2,43} \times 10}{1,28} = 3,5,$$

et par suite

$$f(\lambda, \theta) = \frac{1,09 \times 10^4}{243 \times 128} = \frac{1,09 \times 10^4}{2,43 \times 1,28 \times 10^4} = \frac{3,5}{10} = 0,35.$$

On calculera de même toutes les valeurs de $f(\lambda, \theta)$ et on aura le tableau V qui donne les résultats demandés.

V. Valeurs de $f(\lambda, \theta)$.

	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$
$\theta = 10^3$	0,005	0,226	0,35	0,2846	0,1993
$\theta = 2.10^3$	7,24	9,10	4,33	2,059	1,057
$\theta = 3.10^3$	85,2	32,9	11,07	4,47	2,127

49. *L'élongation u d'une vibration amortie a pour expression, en fonction du temps t,*

$$u = \mathrm{U}\frac{e^{-st}}{\cos\varphi}\cos(rt-\varphi);$$

$$\left(s = \frac{\sin\varphi}{\theta}, \qquad r = \frac{\cos\varphi}{\theta}\right).$$

1° *Quelles sont les valeurs de t qui donnent à u soit une valeur nulle, soit une valeur maximum ou minimum?*

2° *Pour* $\mathrm{U} = 1^{\mathrm{cm}}$, $\theta = 1^{\mathrm{sec}}$, $\varphi = 45°$, *construire une table des valeurs de u en fonction de t, du premier maximum de u à son premier minimum, et procédant par huitièmes de cet intervalle.*

3° *Comment cette table peut-elle être étendue à l'intervalle suivant?*

(*École Polytechnique*, 1910.)

1° Les valeurs finies de t qui annulent u sont données par l'équation

$$\cos(rt-\varphi) = 0, \qquad rt-\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

et sont, par suite,

$$t = \frac{\varphi}{r} + (2k+1)\frac{\pi}{2r},$$

k désignant un nombre entier arbitraire, positif, négatif ou nul.

La dérivée de u par rapport à t est

$$\frac{du}{dt} = \frac{-\mathrm{U}}{\cos\varphi}e^{-st}[s\cos(rt-\varphi)+r\sin(rt-\varphi)],$$

ou

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\mathrm{U}e^{-st}}{\theta\cos\varphi}\sin rt;$$

elle s'annule pour

$$rt = k\pi, \qquad t = \frac{k\pi}{r}.$$

2° Pour $U=1$, $\theta=1$, $\varphi=45°$, on a $s=r=\frac{1}{\sqrt{2}}$, et

$$u=\sqrt{2}\,e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{du}{dt}=-\sqrt{2}\,e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

De $t=0$ à $t=\pi\sqrt{2}$, la dérivée est négative et u décroît. Le premier maximum a donc lieu pour $t=0$ et le premier minimum pour $t=\pi\sqrt{2}$. Les valeurs intermédiaires de t sont $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$, $\frac{2\pi\sqrt{2}}{8}$, ... $\frac{7\pi\sqrt{2}}{8}$, et les valeurs de u sont indiquées dans le tableau suivant :

t	u
0	$u_0=1.$
$\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$	$u_1=\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{8}}\cos\frac{\pi}{8}=e^{-\frac{\pi}{8}}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$
$\frac{2\pi\sqrt{2}}{8}$	$u_2=\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}}$
$\frac{3\pi\sqrt{2}}{8}$	$u_3=\sqrt{2}\,e^{-\frac{3\pi}{8}}\cos\frac{\pi}{8}=e^{-\frac{3\pi}{8}}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$
$\frac{4\pi\sqrt{2}}{8}$	$u_4=e^{-\frac{\pi}{2}}$
$\frac{5\pi\sqrt{2}}{8}$	$u_5=\sqrt{2}\,e^{-\frac{5\pi}{8}}\cos\frac{3\pi}{8}=e^{-\frac{5\pi}{8}}\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$
$\frac{6\pi\sqrt{2}}{8}$	$u_6=0$
$\frac{7\pi\sqrt{2}}{8}$	$u_7=-\sqrt{2}\,e^{-\frac{7\pi}{8}}\cos\frac{3\pi}{8}=-e^{-\frac{7\pi}{8}}\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$
$\pi\sqrt{2}$	$u_8=-e^{-\pi}$

Nous avons

$$1+\frac{\sqrt{2}}{2}=1{,}707,\qquad 1-\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}293\,;$$

nous en tirons à l'aide de la règle

$$\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=1{,}306, \qquad \sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=0{,}541.$$

Calculons maintenant $e^{-\frac{\pi}{8}}$. Nous avons

$$\log e^{-\frac{\pi}{8}}=-\frac{\pi}{8}\log e=-0{,}393\times 0{,}434$$
$$=-0{,}170=\bar{1}{,}830,$$

d'où

$$e^{-\frac{\pi}{8}}=0{,}675.$$

Nous multiplions ce nombre par 0,675, puis le produit obtenu par 0,675, et ainsi de suite et nous obtenons

$$e^{-\frac{\pi}{4}}=0{,}456, \qquad e^{-\frac{3\pi}{8}}=0{,}308,$$
$$e^{-\frac{\pi}{2}}=0{,}208, \qquad e^{-\frac{5\pi}{8}}=0{,}140,$$
$$e^{-\frac{3\pi}{4}}=0{,}0945, \qquad e^{-\frac{7\pi}{8}}=0{,}064,$$
$$e^{-\pi}=0{,}0432.$$

On en déduit aisément les valeurs de u par de simples multiplications et on trouve

$$u_0=1, \qquad u_1=0{,}882, \qquad u_2=0{,}645,$$
$$u_3=0{,}402, \qquad u_4=0{,}208, \qquad u_5=0{,}074,$$
$$u_6=0, \qquad u_7=-0{,}0346 \qquad u_8=-0{,}0432.$$

3° L'intervalle suivant est $(\pi\sqrt{2}, 2\pi\sqrt{2})$; chaque t est augmenté de $\pi\sqrt{2}$ et $\frac{t}{\sqrt{2}}$ est augmenté de π ; le cosinus se reproduit donc changé de signe ; quant au premier facteur, il est multiplié par $e^{-\pi}$, et le nouvel u, u', est donné par

$$u'=-ue^{-\pi}, \qquad \text{ou} \qquad u'=-u.0{,}0432.$$

50. *L'échelle des abscisses horizontales étant* 1^{cm} *pour* 500^{m}, *l'échelle des ordonnées verticales,* 1^{cm} *pour* $0^{m},50$, *si l'on prend pour unité le centimètre du dessin, la trajectoire du projectile de* 75^{mm} *est représentée approximativement par la formule*

$$(1) \qquad y = ax - 8x^2 - x^3,$$

l'origine O *étant au point de départ du projectile. Au deuxième point* M *d'intersection avec* Ox, *le coefficient angulaire* m *de la tangente à la courbe* (1) *est*

$$(2) \qquad m = 8\sqrt{a+16} - 2a - 32.$$

La durée en secondes du trajet jusqu'au point de chute M *est, dans le même système d'unités, donnée par la formule :*

$$(3) \qquad T = \frac{1}{9\sqrt{\gamma}}\left[(6\sqrt{a+16} - 8)^{\frac{3}{2}} - 64\right],$$

où γ *est l'accélération de la pesanteur dont la grandeur est* 981 *C. G. S.*

La lettre α *désignant l'angle de la trajectoire vraie avec le plan horizontal au départ, on fait varier* α *par degrés de* 0° *à* 10°. *Calculer, pour chacun des points de chute correspondants* M, *les éléments suivants :*

1° *En mètres, la portée réelle* OM *;*

2° *En secondes, la durée* T *du trajet ;*

3° *En degrés, l'angle* μ *que fait la trajectoire réelle avec le plan horizontal en* M.

(*École Polytechnique*, 1916.)

Posons

$$A = 1\,000\,\mathrm{tg}\,\alpha + 16, \qquad B = (6\sqrt{A} - 8)^{\frac{3}{2}},$$

nous avons les formules

$$OM = 500(\sqrt{A} - 4),$$
$$\mathrm{tg}\,\mu = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha - 0{,}008(\sqrt{A} - 4),$$
$$T = \frac{B - 64}{9\sqrt{9{,}81}}.$$

Nous calculerons ces quantités au moyen de la règle à calcul.

Calcul de OM.

α	tg α	A	$\sqrt{A}$	$\sqrt{A}-4$	OM
1°	0,0175	33,5	5,79	1,79	895
2°	0,0350	51	7,14	3,14	1 570
3°	0,0524	68,4	8,27	4,27	2 135
4°	0,0700	86	9,27	5,27	2 635
5°	0,0875	103,5	10,17	6,17	3 085
6°	0,105	121	11	7	3 500
7°	0,123	139	11,8	7,8	3 900
8°	0,140	156	12,5	8,5	4 250
9°	0,158	174	13,2	9,2	4 600
10°	0,176	192	13,8	9,8	4 900

Calcul de μ.

α	2 tg α	0,008 ($\sqrt{A}$ — 4)	tg μ	μ
1°	0,035	0,01432	0,0207	1° 10′
2°	0,07	0,02512	0,0449	2° 35′
3°	0,1048	0,03416	0,0706	4°
4°	0,14	0,04216	0,0978	5° 35′
5°	0,175	0,0494	0,1256	7° 10′
6°	0,210	0,056	0,154	8° 45′
7°	0,246	0,0624	0,184	10° 25′
8°	0,280	0,068	0,212	12°
9°	0,316	0,0736	0,242	13° 35′
10°	0,352	0,0784	0,274	15° 20′

CALCUL DE T. $(9\sqrt{9,81} = 28,2)$

α	$6\sqrt{A}$	$6\sqrt{A}-8$	$(6\sqrt{A}-8)^{\frac{1}{2}}$	B	B — 64	T
1°	34,74	26,74	5,17	138	74	2,63
2°	42,84	34,84	5,9	205	141	5,01
3°	49,62	41,62	6,45	268	204	7,24
4°	55,62	47,62	6,9	328	264	9,36
5°	61,02	53,02	7,28	386	322	11,5
6°	66	58	7,61	441	377	13,4
7°	70,8	62,8	7,92	497	433	15,3
8°	75	67	8,18	547	483	17,2
9°	79,2	71,2	8,44	601	537	19
10°	82,8	74,8	8,65	647	583	20,7

51. *Application de la règle à calcul à la fonction* $y = \frac{x}{\sin x}$, *où* x *représente le rapport de l'arc au rayon.*

1° *Dresser une table de la fonction en faisant croître* x *de* 0 *à* 100 *grades par échelons de* 10 *grades.*

2° *Fournir un moyen d'étendre la table en dehors de ses limites et calculer la table auxiliaire nécessaire à cet effet.*

3° *Application : Calculer* y *pour un arc de* 542 *grades, au moyen des deux tables construites.*

(*École Polytechnique*, 1911.)

Nous plaçons dans la première colonne du tableau écrit plus loin les valeurs de x en grades, et dans la deuxième les valeurs correspondantes de x en radians. Comme π correspond à 200 grades, $\frac{\pi}{20}$ ou 0,157 correspond à 10 grades, $0,157 \times 2$ ou 0,314 à 20 grades,... etc.

Cela fait, pour calculer la valeur de $\frac{x}{\sin x}$ correspondant à l'une des valeurs de x de cette colonne, nous prenons la valeur de x sur l'échelle supérieure de la règle, et en face de

ce nombre nous amenons le trait de l'échelle des sinus qui correspond à l'angle x (en degrés). On remarquera que 10 grades correspondent à 9 degrés. Le quotient $\frac{x}{\sin x}$ sera lu sur la graduation supérieure de la règle au-dessus du trait 1 de la réglette.

Nous obtenons ainsi la troisième colonne du tableau.

2° Pour étendre l'usage de la table en dehors de ses limites, il suffit de former une nouvelle table donnant les valeurs de $\frac{\pi}{\sin x}$. Pour cela, au moyen de la règle, nous divisons le nombre π ou 3,141 par les diverses valeurs de $\sin x$, ce qui nous donne la quatrième colonne du tableau.

VALEURS de x en grades.	VALEURS de x en radians.	VALEURS de $\frac{x}{\sin x}$.	VALEURS de $\frac{\pi}{\sin x}$.
0	0	1	»
10	0,157	1,004	20,1
20	0,314	1,016	10,2
30	0,471	1,038	6,92
40	0,628	1,069	5,34
50	0,785	1,110	4,44
60	0,942	1,165	3,88
70	1,099	1,234	3,53
80	1,256	1,321	3,30
90	1,413	1,431	3,18
100	1,570	1,570	3,14

3° On a

$$542 = 600 - 58 = 3 \times 200 - 58,$$

et par suite

$$\frac{\text{arc}\, 542^g}{\sin 542^g} = \frac{3\pi - \text{arc}\, 58^g}{\sin 58^g} = 3 \cdot \frac{\pi}{\sin 58^g} - \frac{\text{arc}\, 58^g}{\sin 58^g}.$$

Pour calculer $\frac{\text{arc}\,58^g}{\sin 58^g}$ et $\frac{\pi}{\sin 58^g}$ au moyen des deux tables qui précèdent, nous admettrons que dans un intervalle de 10^g la variation de chacune de ces fonctions est proportionnelle à la variation de x.

On aura donc, en désignant par $f(x)$ l'une de ces fonctions,

$$\frac{f(\text{arc}\,58^g) - f(\text{arc}\,50^g)}{f(\text{arc}\,60^g) - f(\text{arc}\,50^g)} = \frac{8}{10}$$

ou

$$f(\text{arc}\,58^g) = f(\text{arc}\,50^g) + 0{,}8[f(\text{arc}\,60^g) - f(\text{arc}\,50^g)].$$

Par suite,

$$\frac{\text{arc}\,58^g}{\sin 58^g} = 1{,}110 + 0{,}8(1{,}165 - 1{,}110) = 1{,}154,$$

$$\frac{\pi}{\sin 58^g} = 4{,}44 + 0{,}8(3{,}88 - 4{,}44) = 3{,}992.$$

La valeur demandée est donc

$$3 \times 3{,}992 - 1{,}154 \quad \text{ou} \quad 10{,}822.$$

CHAPITRE IV

SÉRIES

Séries à termes positifs.

52. Soit une série convergente à termes positifs

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots;$$

désignons par S la somme de cette série, par S_n la somme des n premiers termes et par R_n la différence $S - S_n$. On a

$$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots.$$

Supposons que l'on ait pour toutes les valeurs de $p \geqslant n$, $\frac{u_{p+1}}{u_p} < k$, k étant un nombre positif plus petit que 1 ; on peut écrire

$$u_{n+1} < ku_n, \qquad u_{n+2} < k^2 u_n, \qquad u_{n+3} < k^3 u_n, \qquad \dots$$

et, par suite,

$$R_n < u_n (k + k^2 + k^3 + \dots),$$

ou

$$R_n < u_n \frac{k}{1 - k}.$$

L'erreur commise en remplaçant S par S_n est donc moindre que le produit du dernier terme calculé par $\frac{k}{1-k}$.

53. *Calculer le nombre e avec seize décimales exactes.*

Le nombre e est la somme de la série

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots.$$

Le rapport $\frac{u_{p+1}}{u_p}$ est égal à $\frac{1}{p}$, on a donc pour $p \geqslant n+1$, $\frac{u_{p+1}}{u_p} \leqslant \frac{1}{n+1}$, et par suite,

$$e - S_{n+1} < u_{n+1} \cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}},$$

ou

$$e - S_{n+1} < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n!}.$$

On en conclut que si l'on prend pour valeur de e la somme des $n+1$ premiers termes, l'erreur commise est moindre que la n^e partie du dernier terme calculé.

Pour obtenir e avec seize décimales, nous calculerons successivement les termes de la série à $\frac{1}{10^{18}}$ près, jusqu'à ce que nous arrivions à un terme dans lequel les dix-huit premières décimales soient nulles. Le calcul est fort simple, car on déduit chaque terme du précédent par une division.

Nous obtenons ainsi

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}=2,5$$

$$\frac{1}{3!}=0,166666\ 666666\ 666666$$

$$\frac{1}{4!}=0,041666\ 666666\ 666666$$

$$\frac{1}{5!}=0,008333\ 333333\ 333333$$

$$\frac{1}{6!}=0,001388\ 888888\ 888888$$

$$\frac{1}{7!} = 0{,}000198\,412698\,412698$$

$$\frac{1}{8!} = 0{,}000024\,801587\,301587$$

$$\frac{1}{9!} = 0{,}000002\,755731\,922398$$

$$\frac{1}{10!} = 0{,}000000\,275573\,192239$$

$$\frac{1}{11!} = 0{,}000000\,025052\,108385$$

$$\frac{1}{12!} = 0{,}000000\,002087\,675698$$

$$\frac{1}{13!} = 0{,}000000\,000160\,590438$$

$$\frac{1}{14!} = 0{,}000000\,000011\,470745$$

$$\frac{1}{15!} = 0{,}000000\,000000\,764716$$

$$\frac{1}{16!} = 0{,}000000\,000000\,047794$$

$$\frac{1}{17!} = 0{,}000000\,000000\,002811$$

$$\frac{1}{18!} = 0{,}000000\,000000\,000156$$

$$\frac{1}{19!} = 0{,}000000\,000000\,000008$$

En faisant la somme nous avons

$$A = 2{,}718281\,828459\,045226.$$

Nous avons commis sur chaque terme une erreur plus petite que $\frac{1}{10^{18}}$, et comme nous avons calculé 17 termes l'erreur commise sur la somme est moindre que $\frac{17}{10^{18}}$. D'autre part, l'erreur provenant de ce que nous ne prenons que les

vingt premiers termes de la série est moindre que $\frac{1}{19} \cdot \frac{1}{19!}$, ou que $\frac{9}{19.10^{18}}$, ou encore que $\frac{1}{10^{18}}$.

L'erreur totale est donc plus petite que $\frac{18}{10^{18}}$.

Par suite e est compris entre A et $A + \frac{18}{10^{18}}$.

On a donc, à $\frac{1}{10^{16}}$ par défaut,

$$e = 2{,}718281\,828459\,0452.$$

54. *Calculer* $\sqrt{e}$ *à* $\frac{1}{10^6}$ *près.*

On a pour toute valeur de x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

Si $x > 0$, la série est à termes positifs, le rapport $\frac{u_{p+1}}{u_p}$ est égal à $\frac{x}{p}$. Pour $p \geqslant n + 1$, on a $\frac{u_{p+1}}{u_p} \leqslant \frac{x}{n+1}$, et par suite

$$e^x - S_{n+1} < u_{n+1} \cdot \frac{\frac{x}{n+1}}{1 - \frac{x}{n+1}},$$

ou

$$e^x - S_{n+1} < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x}.$$

En particulier, pour $x = \frac{1}{2}$, on a

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 . 2!} + \frac{1}{2^3 . 3!} + \ldots.$$

Calculons chaque terme à $\frac{1}{10^8}$ près, nous avons

$$1+\frac{1}{2}=1{,}5,$$

$$\frac{1}{2^2.2!}=0{,}125,$$

$$\frac{1}{2^3.3!}=0{,}02083333,$$

$$\frac{1}{2^4.4!}=0{,}00260416,$$

$$\frac{1}{2^5.5!}=0{,}00026041,$$

$$\frac{1}{2^6.6!}=0{,}00002170,$$

$$\frac{1}{2^7.7!}=0{,}00000155,$$

$$\frac{1}{2^8.8!}=0{,}00000009,$$

et en faisant la somme nous obtenons

$$B=1{,}64872124.$$

Nous avons commis sur chaque terme une erreur plus petite que $\frac{1}{10^8}$, et par suite sur la somme une erreur moindre que $\frac{6}{10^8}$. En outre, l'erreur provenant de ce que nous ne prenons que les 9 premiers termes de la série est moindre que $\frac{1}{2^8.8!}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{9-\frac{1}{2}}$ où que $\frac{1}{10^7}\cdot\frac{1}{17}$, ou encore que $\frac{1}{10^8}$.

L'erreur totale est donc plus petite que $\frac{7}{10^8}$. Par suite $\sqrt{e}$ est compris entre B et $B+\frac{7}{10^8}$.

On a donc, à $\frac{1}{10^6}$ près par défaut,

$$\sqrt{e}=1{,}648721.$$

55. *Calculer la valeur de e^2 à un dix-millième près. (On ne supposera pas connue la valeur du nombre e.)*

(*École Polytechnique*, 1905.)

On trouve

$$e^2 = 7,3890.$$

56. *Calculer $\sqrt[5]{e^2}$ à $\frac{1}{10^{10}}$ près.*

On trouve

$$\sqrt[5]{e^2} = e^{\frac{2}{5}} = 1,4918246976.$$

57. *Calculer à $\frac{1}{10^4}$ près la somme de la série*

$$1 + \frac{1}{(2!)^3} + \frac{1}{(3!)^3} + \dots + \frac{1}{(n!)^3} + \dots.$$

Réponse : 1,1297.

58. *Sachant que l'on a*

$$\text{arc sin}\, x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \dots,$$

calculer arc sin $\frac{1}{2}$ *à un millième près.*

(*Certificat d'Analyse, Besançon*, 1899.)

59. *On considère une ligne brisée* $A_0\ A_1 \dots\ A_n \dots$, *ayant tous ses sommets sur l'hyperbole* $xy = 1$, A_0 *étant au sommet* $x = 1$, $y = 1$, *de cette hyperbole, ses côtés tangents à l'hyperbole* $xy = \lambda^2$ (*en posant* $\lambda = \text{ch}\,\varphi$), *et telle que les abscisses de ses sommets successifs soient croissantes.*

1° *Déterminer les coordonnées x_n et y_n du point* A_n *et la longueur l_n du côté* $A_{n-1}A_n$.

2° *Montrer que la série*

$$f(\lambda) = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \ldots + \frac{1}{l_n} + \ldots$$

est convergente.

3° *Calculer* $f\left(\frac{5}{4}\right)$ *à 0,0001 près.*

(*École des Mines de Paris*, 1919.)

En posant $z = e^{2\lambda}$, on a

$$x_n = z^n, \qquad y_n = \frac{1}{z^n},$$

$$l_n = \frac{(z-1)\sqrt{1+z^{4n-2}}}{z^n}.$$

Le rapport de $\frac{1}{l_{n+1}}$ à $\frac{1}{l_n}$ a pour limite $\frac{1}{z}$ pour n infini. Comme $\frac{1}{z}$ est plus petit que 1, la série est convergente.

Si $\lambda = \frac{5}{4}$, on a $z = 4$ et

$$\frac{1}{l_n} = \frac{4^n}{3\sqrt{1+4^{4n-2}}}.$$

La série est donc

$$(1) \qquad \frac{4}{3\sqrt{1+4^2}} + \frac{4^2}{3\sqrt{1+4^6}} + \frac{4^3}{3\sqrt{1+4^{10}}} + \ldots.$$

Si nous remplaçons dans cette série le terme

$$u_n = \frac{1}{l_n} = \frac{4^n}{3\sqrt{1+4^{4n-2}}}$$

par la quantité

$$v_n = \frac{4^n}{3\sqrt{4^{4n-2}}} = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}},$$

nous commettons une erreur par excès qui est égale à

$$v_n - u_n = \frac{1}{3.4^{n-1}} - \frac{4^n}{3\sqrt{1+4^{4n-2}}} = \frac{\sqrt{1+4^{4n-2}} - 4^{2n-1}}{3.4^{n-1}\sqrt{1+4^{4n-2}}},$$

ou

$$v_n - u_n = \frac{1}{3.4^{n-1}\sqrt{1+4^{4n-2}}\left[\sqrt{1+4^{4n-2}} + 4^{2n-1}\right]}.$$

On en déduit

$$v_n - u_n < \frac{1}{3.4^{n-1}.4^{2n-1}.2.4^{2n-1}},$$

ou

$$v_n - u_n < \frac{1}{6.4^{5n-3}}.$$

Par suite, si dans la série (1) nous remplaçons u_2, u_3, ..., par v_2, v_3, ..., nous obtenons une nouvelle série

(2) $$u_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots,$$

dont la somme S′ est supérieure à la somme S de la série (1), la différence S′ — S étant moindre que

$$\frac{1}{6.4^7} + \frac{1}{6.4^{12}} + \frac{1}{6.4^{17}} + \ldots \quad \text{ou} \quad \frac{1}{6.4^2(4^5-1)};$$

et ceci est plus petit que $\frac{2}{10^5}$.

Or, il est facile de calculer S′ ; on a

$$S' = \frac{4}{3\sqrt{17}} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4^2} + \frac{1}{3.4^3} + \ldots$$

ou

$$S' = \frac{4}{3\sqrt{17}} + \frac{1}{9}.$$

Calculons $\frac{4}{3\sqrt{17}}$ ou $\frac{4\sqrt{17}}{51}$ et $\frac{1}{9}$ à $\frac{1}{10^6}$ près par excès ; nous obtenons

$$\frac{4\sqrt{17}}{51} = 0,323381, \qquad \frac{1}{9} = 0,111112,$$

et en faisant la somme nous avons

0,434493.

C'est une valeur par excès de S, l'erreur étant moindre que $\frac{2}{10^5} + \frac{2}{10^6}$.

On en conclut que 0,4344 est la somme de la série proposée à $\frac{1}{10^4}$ par défaut.

60. *Calculer à* $\frac{1}{100}$ *près la somme de la série*

$$1 + \frac{\sin\varphi}{1} + \left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\sin\varphi}{n}\right)^n + \ldots$$

où l'on suppose $\varphi = 29^\circ$.

(*École des Ponts et Chaussées*, 1909.)

Si l'on pose $u_n = \left(\frac{\sin\varphi}{n}\right)^n$, on a $\sqrt[n]{u_n} = \frac{\sin\varphi}{n}$, et cette quantité a pour limite zéro quand n augmente indéfiniment. Donc la série est convergente, quelle que soit la valeur de φ.

En particulier, pour $\varphi = 29^\circ$, la série est à termes positifs, et si nous désignons par S la somme de la série, par S_n la somme des n premiers termes,

$$S_n = 1 + \frac{\sin\varphi}{1} + \left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\sin\varphi}{n-1}\right)^{n-1},$$

nous avons

$$S - S_n = \left(\frac{\sin\varphi}{n}\right)^n + \left(\frac{\sin\varphi}{n+1}\right)^{n+1} + \left(\frac{\sin\varphi}{n+2}\right)^{n+2} + \ldots.$$

Nous allons calculer une limite supérieure du second membre.

Comme $\sin 29^\circ < \sin 30^\circ$, ou $\sin 29^\circ < \frac{1}{2}$, nous avons

$$S - S_n < \left(\frac{1}{2n}\right)^n + \left[\frac{1}{2(n+1)}\right]^{n+1} + \left[\frac{1}{2(n+2)}\right]^{n+2} + \ldots$$

ou, *a fortiori*,

$$S - S_n < \left(\frac{1}{2n}\right)^n + \left(\frac{1}{2n}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2n}\right)^{n+2} + \dots$$

ou enfin

$$S - S_n < \frac{\left(\frac{1}{2n}\right)^n}{1 - \frac{1}{2n}} < \frac{1}{(2n)^{n-1}(2n-1)}.$$

Pour $n = 3$, ceci nous donne

$$S - S_3 < \frac{1}{6^2.5} < \frac{6}{10^3};$$

donc S_3 est une valeur approchée de S par défaut à moins de $\frac{6}{10^3}$.

D'autre part,

$$S_3 = 1 + \frac{\sin 29^\circ}{1} + \left(\frac{\sin 29^\circ}{2}\right)^2;$$

nous avons

$$\log \sin 29^\circ = \bar{1},68557,$$

d'où nous tirons, à $\frac{1}{10^4}$ près par défaut,

$$\sin 29^\circ = 0,4848, \qquad \left(\frac{\sin 29^\circ}{2}\right)^2 = 0,0587,$$

et

$$S_3 = 1,5435.$$

C'est une valeur de S par défaut, l'erreur étant moindre que $\frac{6}{10^3} + \frac{2}{10^4}$ ou $\frac{62}{10^4}$.

On a donc, à $\frac{1}{100}$ près par défaut,

$$S = 1,54.$$

61. *Soit la série* U *dont le terme général est*

$$u_n = \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \qquad x > 0.$$

Montrer qu'en prenant seulement n *termes, on commet une erreur moindre que*

$$\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Calculer au moyen de cette remarque, avec sept décimales exactes, la valeur de la série pour $x = \frac{1}{10}$.

(*Certificat de Mathématiques générales, Lyon*, 1899.)

On trouve pour somme de la série 0,1003353.

Calcul des logarithmes.

62. Logarithmes népériens. — Pour calculer les logarithmes népériens, on utilise la série bien connue

$$\mathrm{L}\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right),$$

qui est convergente pour toute valeur de x plus petite que 1 en valeur absolue.

Remplaçons-y x par $\frac{b}{2a+b}$, a et b étant deux nombres entiers positifs; $\mathrm{L}\frac{1+x}{1-x}$ prend la valeur $\mathrm{L}\frac{a+b}{a}$, ou $\mathrm{L}(a+b) - \mathrm{L}a$, et la formule précédente devient

$$(1) \qquad \mathrm{L}(a+b)$$
$$= \mathrm{L}a + 2\left[\frac{b}{2a+b} + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^5 + \ldots\right];$$

elle permet de calculer $\mathrm{L}(a+b)$, si l'on connaît $\mathrm{L}a$.

En particulier pour $b = 1$, on a

(2) $$L(a+1) = La + 2\left(\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{3(2a+1)^3} + \frac{1}{5(2a+1)^5} + \dots\right)$$

Au moyen de cette formule, on pourra calculer successivement les logarithmes des nombres entiers.

63. *Calculer* L2.

Remplaçons a par 1 dans l'égalité (2), nous avons

$$L2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \dots\right).$$

Nous allons calculer chaque terme de la série à $\frac{1}{10^{15}}$ près ; pour cela, nous calculerons d'abord les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3^3}$, $\frac{2}{3^5}$, $\frac{2}{3^7}$, ... parce que chacune d'elles se déduit de la précédente en divisant celle-ci par 9. Nous obtenons ainsi

$$\frac{2}{3} = 0{,}66666\ 66666\ 66666,$$

$$\frac{2}{3^3} = 0{,}07407\ 40740\ 74074,$$

$$\frac{2}{3^5} = 0{,}00823\ 04526\ 74897,$$

$$\frac{2}{3^7} = 0{,}00091\ 44947\ 41655,$$

$$\frac{2}{3^9} = 0{,}00010\ 16105\ 26850,$$

$$\frac{2}{3^{11}} = 0{,}00001\ 12900\ 58538,$$

$$\frac{2}{3^{13}} = 0{,}00000\ 12544\ 50948,$$

$$\frac{2}{3^{15}} = 0{,}00000\ 01393\ 83438,$$

$$\frac{2}{3^{17}} = 0{,}00000\,00154\,87048,$$

$$\frac{2}{3^{19}} = 0{,}00000\,00017\,20783,$$

$$\frac{2}{3^{21}} = 0{,}00000\,00001\,91198,$$

$$\frac{2}{3^{23}} = 0{,}00000\,00000\,21244,$$

$$\frac{2}{3^{25}} = 0{,}00000\,00000\,02360,$$

$$\frac{2}{3^{27}} = 0{,}00000\,00000\,00262,$$

$$\frac{2}{3^{29}} = 0{,}00000\,00000\,00029.$$

Nous aurons les termes de la série en divisant ces fractions respectivement par 1, 3, 5, 7, ... 29. Ceci nous donne

$$\frac{2}{3} = 0{,}66666\,66666\,66666,$$

$$\frac{2}{3 \cdot 3^{3}} = 0{,}02469\,13580\,24691,$$

$$\frac{2}{5 \cdot 3^{5}} = 0{,}00164\,60905\,34979,$$

$$\frac{2}{7 \cdot 3^{7}} = 0{,}00013\,06421\,05950,$$

$$\frac{2}{9 \cdot 3^{9}} = 0{,}00001\,12900\,58538,$$

$$\frac{2}{11 \cdot 3^{11}} = 0{,}00000\,10263\,68958,$$

$$\frac{2}{13 \cdot 3^{13}} = 0{,}00000\,00964\,96226,$$

$$\frac{2}{15 \cdot 3^{15}} = 0{,}00000\,00092\,92229,$$

$$\frac{2}{17 \cdot 3^{17}} = 0{,}00000\,00009\,11002,$$

$$\frac{2}{19 \cdot 3^{19}} = 0{,}00000\,00000\,90567,$$

$$\frac{2}{21 \cdot 3^{21}} = 0{,}00000\,00000\,09104;$$

$$\frac{2}{23 \cdot 3^{23}} = 0,00000\,00000\,00923,$$

$$\frac{2}{25 \cdot 3^{25}} = 0,00000\,00000\,00094,$$

$$\frac{2}{27 \cdot 3^{27}} = 0,00000\,00000\,00009,$$

$$\frac{2}{29 \cdot 3^{29}} = 0,00000\,00000\,00001,$$

et, en faisant la somme, nous obtenons

$$A = 0,69314\,71805\,59937.$$

Ce nombre A est une valeur approchée de L2; il nous faut déterminer l'approximation.

Sur chaque terme nous avons commis une erreur plus petite que $\frac{1}{10^{15}}$ et comme nous avons 15 termes, l'erreur totale est moindre que $\frac{15}{10^{15}}$.

D'autre part, nous n'avons pris que les 15 premiers termes de la série; nous avons ainsi commis une nouvelle erreur plus petite que $\frac{ku_n}{1-k}$, u_n étant le dernier terme calculé et k étant égal à $\frac{1}{9}$. Or, le dernier terme calculé est plus petit que $\frac{2}{10^{15}}$, et $\frac{k}{1-k}$ est égal à $\frac{1}{8}$; donc l'erreur est moindre que $\frac{1}{10^{15}}$, et par suite l'erreur totale est plus petite que $\frac{16}{10^{15}}$.

On en conclut que L2 est compris entre A et $A + \frac{16}{10^{15}}$, on a donc, avec 13 chiffres exacts, ou à $\frac{1}{10^{13}}$ près par défaut,

$$L2 = 0,69314\,71805\,599.$$

64. *Calculer* L3, L5, L7.

On utilisera les formules

$$L3 = L2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \frac{1}{7.5^7} + \dots\right),$$

$$L5 = 2L2 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \frac{1}{7.9^7} + \dots\right),$$

$$L7 = L3 + L2 + 2\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{3.13^3} + \frac{1}{5.13^5} + \dots\right).$$

On obtient ainsi, à $\frac{1}{10^{13}}$ près par défaut,

$$L3 = 1{,}09861\,22886\,681,$$
$$L5 = 1{,}60943\,79124\,341,$$
$$L7 = 1{,}94591\,01490\,553.$$

Il suffit naturellement de calculer les logarithmes des nombres premiers.

On peut quelquefois opérer plus simplement en utilisant des séries plus convergentes. En voici quelques exemples.

65. *Calculer* L11.

Dans la formule (2) remplaçons $a+1$ par 121 ou 11^2 et par suite a par 120 ou $2^3 \times 3 \times 5$. Nous avons

$$2L11 = 3L2 + L3 + L5 + 2\left(\frac{1}{241} + \frac{1}{3.241^3} + \frac{1}{5.241^5} + \dots\right).$$

Comme nous connaissons L2, L3 et L5, nous pouvons calculer L11.

Calculons d'abord les termes de la série entre crochets avec quinze décimales; pour cela, nous calculons successivement $\frac{1}{241}$, $\frac{1}{241^2}$, $\frac{1}{241^3}$, ... et nous avons

$$\frac{1}{241} = 0{,}00414\,93775\,93360,$$

$$\frac{1}{241^2} = 0{,}00001\,72173\,34412,$$

$$\frac{1}{241^3} = 0,00000\,00714\,41221,$$

$$\frac{1}{241^4} = 0,00000\,00002\,96436,$$

$$\frac{1}{241^5} = 0,00000\,00000\,01230;$$

nous en tirons

$$\frac{1}{241} = 0,00414\,93775\,93360,$$

$$\frac{1}{3.241^3} = 0,00000\,00238\,13740,$$

$$\frac{1}{5.241^5} = 0,00000\,00000\,00246,$$

et en ajoutant, nous obtenons

$$B = 0,00414\,94014\,07346;$$

c'est une valeur approchée de la somme S de la série à $\frac{4}{10^{15}}$ près, car on peut prendre comme dernier terme calculé le terme $\frac{1}{7.241^7}$, dont les quinze premières décimales sont nulles.

D'autre part, on a

$$2B = 0,00829\,88028\,14692,$$
$$3L2 = 2,07944\,15416\,797,$$
$$L3 = 1,09861\,22886\,681,$$
$$L5 = 1,60943\,79124\,341,$$

et, en ajoutant,

$$C = 4,79579\,05455\,96592,$$

puis, en divisant par 2,

$$\frac{C}{2} = 2,39789\,52727\,98296.$$

Nous avons commis sur 2S, 3L2, L3, L5 des erreurs moindres respectivement que $\frac{8}{10^{15}}$, $\frac{3}{10^{13}}$, $\frac{1}{10^{13}}$, $\frac{1}{10^{13}}$; la somme de ces erreurs est plus petite que $\frac{6}{10^{13}}$. On en conclut que $\frac{C}{2}$ est une valeur de L11, approchée à $\frac{3}{10^{13}}$ près. On a donc, avec douze décimales exactes,

$$L11 = 2{,}39789\,52727\,98.$$

66. *Calculer* L13 *et* L17.

On remplacera dans la formule (2) a successivement par 168 et 288, et on aura les relations

$$2L13 = 3L2 + L3 + L7 + 2\left(\frac{1}{337} + \frac{1}{3.337^3} + \frac{1}{5.337^5} + \dots\right),$$

$$2L17 = 5L2 + 2L3 + 2\left(\frac{1}{577} + \frac{1}{3.577^3} + \frac{1}{5.577^5} + \dots\right).$$

On en déduit

$$L13 = 2{,}56494\,93574\,61,$$
$$L17 = 2{,}83321\,33440\,56.$$

67. On peut aussi dans certains cas utiliser la formule (1). Par exemple, faisons dans cette formule $a + b = 128 = 2^7$, et $a = 125 = 5^3$, nous obtenons

$$L5 = \frac{7}{3}L2 - \frac{2}{3}\left[\frac{3}{253} + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{253}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{253}\right)^5 + \dots\right],$$

et cette formule permet de calculer assez rapidement L5, quand on connaît L2.

68. *Calculer* L10 *et* $\frac{1}{L10}$.

On a

$$L10 = L2 + L5.$$

Or, nous avons obtenu

$$L2 = 0{,}69314\,71805\,599,$$
$$L5 = 1{,}60943\,79124\,341,$$

nous en tirons en ajoutant

$$L10 = 2{,}30258\,50929\,940,$$

à $\frac{2}{10^{13}}$ près; les douze premières décimales sont exactes.

Pour calculer $\frac{1}{L10}$, nous chercherons le quotient de 1 par L10 au moyen d'une division abrégée (tome I, nº 9). Puisque nous connaissons treize chiffres du diviseur, nous pourrons calculer onze chiffres du quotient, et comme celui-ci est compris entre 0 et 1, nous aurons ce quotient à $\frac{1}{10^{11}}$ près.

Voici l'opération :

```
10000000000000 | 2302585092994
   78965962824 |--------------
    9888410027 | 43429448190
     678069641 |
     217552627 |
      10319964 |
       1109624 |
        188590 |
         43842 |
         20817 |
            99 |
```

On a donc

$$\frac{1}{L10} = 0{,}43429\,44819\,0.$$

69. *Sachant que* L 100 = 4,6052 *à* $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^4}$ *près, calculer avec la même approximation* L101 *et* L102.

(*Certificat de Mathématiques générales*, *Toulouse*, 1910.)

On trouve

$$L101 = 4,6151, \qquad L102 = 4,6250.$$

70. Logarithmes vulgaires. — On a la formule

$$\log x = ML x,$$

où

$$M = \frac{1}{L10} = 0,43429\,448190.$$

On aura donc le logarithme vulgaire d'un nombre en multipliant son logarithme népérien par M.

71. *Calculer* log 2.

Nous avons obtenu plus haut (63) L2 avec treize décimales exactes ; comme nous connaissons M avec onze décimales exactes, nous pourrons calculer le produit ML2 ou log2 avec dix décimales, au moyen de la multiplication abrégée suivante (tome I, n° 1).

$$\begin{array}{r}
0,6\,9\,3\,1\,4\,7\,1\,8\,0\,5\,5\,9\,9 \\
0\,9\,1\,8\,4\,4\,9\,2\,4\,3\,4,0 \\
\hline
2\,7\,7\,2\,5\,8\,8\,7\,2\,2\,2\,0 \\
2\,0\,7\,9\,4\,4\,1\,5\,4\,1\,5 \\
2\,7\,7\,2\,5\,8\,8\,7\,2\,0 \\
1\,3\,8\,6\,2\,9\,4\,3\,6 \\
6\,2\,3\,8\,3\,2\,3\,9 \\
2\,7\,7\,2\,5\,8\,8 \\
2\,7\,7\,2\,5\,6 \\
5\,5\,4\,4\,8 \\
6\,9\,3 \\
6\,2\,1 \\
\hline
0,3\,0\,1\,0\,2\,9\,9\,9\,5\,6\,3\,6
\end{array}$$

Nous obtenons ainsi, à $\frac{1}{10^{10}}$ près par défaut,

$$\log 2 = 0,3010299956.$$

72. On obtiendra de même, en multipliant par M les logarithmes népériens calculés plus haut de 3, 5, 7, 11, 13, 17,

$$\begin{aligned}
\log 3 &= 0,47712\,12547,\\
\log 5 &= 0,69897\,00043,\\
\log 7 &= 0,84509\,80400,\\
\log 11 &= 1,04139\,26851,\\
\log 13 &= 1,11394\,33523,\\
\log 17 &= 1,23044\,89213.
\end{aligned}$$

73. Calcul rapide des logarithmes népériens quand on a une table de logarithmes vulgaires à cinq décimales. — On utilise la formule

$$Lx = \frac{1}{M}\log x,$$

et on peut opérer de deux manières.

1° En prenant les logarithmes vulgaires des deux membres, on a

$$\log|Lx| = \log|\log x| - \log M.$$

Si l'on connaît $\log x$, on peut calculer $\log|\log x|$, puis $\log M$; on en déduit $\log|Lx|$, puis $|Lx|$.

Cette méthode donne en général Lx avec cinq chiffres exacts.

2° On trouve dans la plupart des tables de logarithmes les produits de $\frac{1}{M}$, ou de L10, par les neuf premiers nombres, ces produits étant donnés à $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5}$ par défaut ou par excès.

On peut d'ailleurs les calculer directement en multipliant la valeur de $\frac{1}{M}$ obtenue plus haut (68) successivement par les neuf premiers nombres, et en limitant chaque produit aux cinq premières décimales, la cinquième étant augmentée d'une unité, si la sixième est égale ou supérieure à 5 (*).

Alors pour calculer le produit $\frac{1}{M}\log x$, il suffit d'ajouter les produits de $\frac{1}{M}$ par les différents chiffres de $\log x$, chaque produit étant divisé par une puissance de 10 convenable.

Si l'on suppose que $\log x$ a un seul chiffre à sa partie entière, les erreurs commises sur les produits de $\frac{1}{M}$ par les chiffres de $\log x$ sont respectivement moindres que $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^6}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^7}$, ...; leur somme est plus petite que $\frac{0{,}6}{10^5}$. D'autre part, $\log x$ n'étant connu qu'à $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5}$ près, on commet une nouvelle erreur inférieure à $\frac{1}{M}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^5}$ ou à $\frac{1{,}2}{10^5}$. L'erreur totale est donc plus petite que $\frac{1{,}8}{10^5}$.

Parmi les erreurs signalées, les unes sont par défaut, les autres par excès, si bien que l'erreur totale peut être assez faible et ne pas altérer la cinquième décimale du logarithme népérien.

Voici quelques exemples.

74. *Calculer* L11.

On lit dans la table : $\log 11 = 1{,}04139$.

(*) On trouvera ces produits à la fin du volume.

PREMIÈRE MÉTHODE.

Calcul de log log 11.

$\Delta = 42$

1041	01745
3	12,6
9	3,78

log log 11 = 0,01761

Calcul de log M.

$\Delta = 10$

4342	63769
9	9

$\log M = \bar{1},63778$

Calcul de L 11.

log log 11 = 0,01761
— log M = 0,36222
log L 11 = 0,37983

$\Delta = 18$

67	2397
16	
14,4	8
1,6	9

L 11 = 2,39789.

DEUXIÈME MÉTHODE. — Écrivons les produits de $\frac{1}{M}$ par les nombres 1, $\frac{4}{100}$, $\frac{1}{1\,000}$, $\frac{3}{10\,000}$, $\frac{9}{100\,000}$, et ajoutons-les ; nous avons l'opération suivante :

$$\begin{array}{l} 2,30259 \\ 0,0921034 \\ 0,00230259 \\ 0,000690776 \\ 0,0002072327 \\ \hline 2,3978939987 \end{array}$$

et nous retrouvons

L 11 = 2,39789.

75. *Calculer* L 17.

La première méthode donne 2,83326, et la seconde 2,83322.

76. *Calculer* L 0,06871.

Le nombre 0,06871 étant plus petit que 1, ses deux logarithmes sont négatifs.

On a

$$\log 0{,}06871 = \bar{2}{,}83702 = -2 + 0{,}83702$$
$$= -1{,}16298.$$

Dans la première méthode, on prendra le logarithme vulgaire de 1,16298, soit 0,06557, et on ajoutera — log M. On trouve ainsi

$$L0{,}06871 = -2{,}67787.$$

La seconde méthode donne

$$L0{,}06871 = -2{,}67786.$$

Séries alternées.

77. Soient S la somme d'une série alternée supposée convergente et S_n la somme des n premiers termes ; on sait que $S - S_n$ est moindre en valeur absolue que le $(n+1)^e$ terme et a le signe de ce terme.

78. *Calcul de* $\frac{1}{e}$ *à* $\frac{1}{10^{10}}$ *près.*

On a, pour toute valeur de x,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots ;$$

on en déduit pour $x = -1$,

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots .$$

Nous calculons successivement les termes de cette série à $\frac{1}{10^{12}}$ près (*) jusqu'à ce que nous arrivions à un terme

(*) Ce calcul a été fait au n° 53.

dans lequel les dix premières décimales sont nulles ; c'est le terme $\frac{1}{14!}$, qui est moindre que $\frac{12}{10^{12}}$.

Si nous posons

$$s = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{10!} + \frac{1}{12!}.$$

$$s' = 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{11!} + \frac{1}{13!},$$

$s - s'$ est une valeur approchée de $\frac{1}{e}$ par défaut, l'erreur étant plus petite que $\frac{1}{14!}$ ou que $\frac{12}{10^{12}}$.

On peut donc écrire

(1) $$\frac{1}{e} = s - s' + \varepsilon, \qquad \varepsilon < \frac{12}{10^{12}}.$$

Calculons les termes de s par défaut à $\frac{1}{10^{12}}$ près, nous avons

$$1 + \frac{1}{2!} = 1{,}5,$$

$$\frac{1}{4!} = 0{,}04166\ 66666\ 66,$$

$$\frac{1}{6!} = 0{,}00138\ 88888\ 88,$$

$$\frac{1}{8!} = 0{,}00002\ 48015\ 87,$$

$$\frac{1}{10!} = 0{,}00000\ 02755\ 73,$$

$$\frac{1}{12!} = 0{,}00000\ 00020\ 87,$$

et, en ajoutant,

$$A = 1{,}54308\ 06348\ 01.$$

Nous avons commis une erreur plus petite que $\frac{1}{10^{12}}$ dans le calcul des cinq derniers termes de s ; donc A est une valeur

approchée de s par défaut, l'erreur étant moindre que $\frac{5}{10^{12}}$.
On a donc

$$s = A + \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 < \frac{5}{10^{12}}.$$

Calculons maintenant les termes de s' par excès à $\frac{1}{10^{12}}$ près, nous avons

$$1 + \frac{1}{3!} = 1{,}16666\,66666\,67,$$
$$\frac{1}{5!} = 0{,}00833\,33333\,34,$$
$$\frac{1}{7!} = 0{,}00019\,84126\,99,$$
$$\frac{1}{9!} = 0{,}00000\,27557\,32,$$
$$\frac{1}{11!} = 0{,}00000\,00250\,53,$$
$$\frac{1}{13!} = 0{,}00000\,00001\,61,$$

et, en ajoutant,

$$B = 1{,}17520\,11936\,46;$$

B est une valeur approchée de s' par excès, l'erreur étant moindre que $\frac{6}{10^{12}}$. On a donc

$$s' = B - \varepsilon_2, \qquad \varepsilon_2 < \frac{6}{10^{12}}.$$

Remplaçons s et s' par ces valeurs dans la relation (1), nous obtenons

$$\frac{1}{e} = A - B + \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

et

$$\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \frac{12 + 5 + 6}{10^{12}} < \frac{23}{10^{12}}.$$

On en conclut que $\frac{1}{e}$ est compris entre $A - B$ et $A - B + \frac{23}{10^{12}}$.

Comme on a

$$A - B = 0{,}36787\ 94411\ 55,$$

on en conclut, avec dix décimales exactes,

$$\frac{1}{e} = 0{,}36787\ 94411.$$

79. *Calcul de π avec dix-sept décimales.*

Nous utiliserons la formule bien connue

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239},$$

et nous calculerons les arc tg au moyen de leurs développements en série.

Nous avons

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \dots .$$

Calculons chaque terme à $\frac{1}{10^{20}}$ près, les termes positifs par défaut, les termes négatifs par excès. Nous obtenons

$$\frac{1}{5} = 0{,}20000\ 00000\ 00000\ 00000,$$

$$\frac{1}{5.5^5} = 0{,}00006\ 40000\ 00000\ 00000,$$

$$\frac{1}{9.5^9} = 0{,}00000\ 00568\ 88888\ 88888,$$

$$\frac{1}{13.5^{13}} = 0{,}00000\ 00000\ 63015\ 38461,$$

$$\frac{1}{17.5^{17}} = 0{,}00000\ 00000\ 00077\ 10117,$$

$$\frac{1}{21.5^{21}} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 09986,$$

$$\frac{1}{25.5^{25}} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00013,$$

et, en ajoutant,

$$A = 0{,}20006\ 40569\ 51981\ 47465.$$

Nous avons maintenant

$$\frac{1}{3.5^3} = 0{,}00266\ 66666\ 66666\ 66667,$$
$$\frac{1}{7.5^7} = 0{,}00000\ 18285\ 71428\ 57143,$$
$$\frac{1}{11.5^{11}} = 0{,}00000\ 00018\ 61818\ 18182,$$
$$\frac{1}{15.5^{15}} = 0{,}00000\ 00000\ 02184\ 53334,$$
$$\frac{1}{19.5^{19}} = 0{,}00000\ 00000\ 00002\ 75942,$$
$$\frac{1}{23.5^{23}} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00365,$$
$$\frac{1}{27.5^{27}} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00001,$$

et, en ajoutant,

$$B = 0{,}00266\ 84971\ 02100\ 71634.$$

Nous en tirons

$$A - B = 0{,}19739\ 55598\ 49880\ 75831$$

et

$$4(A - B) = 0{,}78958\ 22393\ 99523\ 03324.$$

Ce nombre est une valeur approchée par défaut de $4 \text{ arc tg} \frac{1}{5}$; déterminons l'erreur commise.

Le premier terme négligé dans la série est $+\frac{1}{29.5^{29}}$; il est plus petit que $\frac{1}{10^{21}}$. D'autre part, nous avons calculé douze termes avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^{20}}$. On en conclut que

A — B est une valeur approchée de arc tg $\frac{1}{5}$ par défaut, l'erreur étant plus petite que $\frac{12}{10^{20}} + \frac{1}{10^{21}}$ ou que $\frac{121}{10^{21}}$.

On a donc

$$\text{arc tg}\frac{1}{5} = A - B + \varepsilon, \qquad 0 < \varepsilon < \frac{121}{10^{21}};$$

et

$$4 \text{ arc tg}\frac{1}{5} = 4(A - B) + \varepsilon_1, \qquad 0 < \varepsilon_1 < \frac{484}{10^{21}}.$$

D'autre part,

$$\text{arc tg}\frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \frac{1}{7.239^7} + \cdots.$$

Nous calculons cette fois les termes positifs par excès et les termes négatifs par défaut, toujours à $\frac{1}{10^{20}}$ près.

Nous obtenons

$$\frac{1}{239} = 0{,}00418\,41004\,18410\,04185,$$

$$\frac{1}{5.239^5} = 0{,}00000\,00000\,00256\,47232,$$

et, en ajoutant,

$$C = 0{,}00418\,41004\,18666\,51417;$$

puis

$$\frac{1}{3.239^3} = 0{,}00000\,00244\,16591\,78708,$$

$$\frac{1}{7.239^7} = 0{,}00000\,00000\,00000\,00320$$

et, en faisant la somme,

$$D = 0{,}00000\,00244\,16591\,79028,$$

d'où

$$C - D = 0{,}00418\,40760\,02074\,72389.$$

$C - D$ est une valeur approchée par excès de $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$, l'erreur étant moindre que $\frac{4}{10^{20}} + \frac{1}{10^{21}}$ ou que $\frac{41}{10^{21}}$.

On peut donc écrire

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} = C - D - \varepsilon_2, \qquad 0 < \varepsilon_2 < \frac{41}{10^{21}}.$$

Nous en tirons

$$\frac{\pi}{4} = 4(A - B) - (C - D) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

ou, en posant $4(A - B) - (C - D) = E$,

$$\frac{\pi}{4} = E + \varepsilon_3, \qquad 0 < \varepsilon_3 < \frac{525}{10^{21}}$$

et

$$\pi = 4E + \varepsilon_4, \qquad 0 < \varepsilon_4 < \frac{21}{10^{19}}.$$

On a

$$E = 0{,}78539\,81633\,97448\,30939,$$
$$4E = 3{,}14159\,26535\,89793\,23756.$$

On en conclut que π est compris entre $4E$ et $4E + \frac{21}{10^{19}}$; on a donc, avec dix-sept décimales exactes,

$$\pi = 3{,}14159\,26535\,89793\,23.$$

80. 1° *Exprimer au moyen d'une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x l'intégrale particulière y de l'équation différentielle*

$$y'' = xy,$$

telle que pour $x = 0$ on ait $y = 1$ et $y' = 0$.

2° *La série obtenue représente-t-elle cette intégrale particulière pour toute valeur de x?*

3° *Indiquer une limite de l'erreur commise quand on s'arrête au terme en x^9 inclus, en supposant soit x positif, soit x négatif.*

4° *Calculer, au moyen de cette série, arrêtée au terme en* x^9 *inclus, les valeurs numériques de* y *qui correspondent aux quatre valeurs suivantes de* x :

$$-2, \quad -1, \quad 1 \quad et \quad 2,$$

en fixant chaque fois une limite de l'erreur commise.

(*École des Ponts et Chaussées*, 1912.)

1° La série cherchée est

$$1+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^6}{2.3.5.6}+\frac{x^9}{2.3.5.6.8.9}$$
$$+\ldots+\frac{x^{3n}}{2.3.5.6.8.9\ldots(3n-1)3n}+\ldots.$$

2° Cette série est absolument convergente quel que soit x, et la somme de cette série est une intégrale particulière de l'équation différentielle donnée pour toute valeur de x.

3° Soit $f(x)$ la somme de la série et $f_4(x)$ la somme des quatre premiers termes :

$$f_4(x)=1+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^6}{2.3.5.6}+\frac{x^9}{2.3.5.6.8.9};$$

nous nous proposons d'évaluer une limite supérieure de l'erreur $f(x)-f_4(x)$.

Supposons d'abord $x>0$; la série est à termes positifs. Pour toute valeur de p supérieure ou égale à 4, on a

$$\frac{u_{p+1}}{u_p}<\frac{x^3}{11.12}.$$

Si on suppose $\frac{x^3}{11.12}<1$, on sait que (52)

$$f(x)-f_4(x)<u_4.\frac{\frac{x^3}{11.12}}{1-\frac{x^3}{11.12}}$$

ou

$$f(x)-f_4(x)<\frac{x^{12}}{2.3.5.6.8.9(11.12-x^3)}.$$

Si x est négatif, la série est alternée. L'erreur est moindre en valeur absolue que le premier terme négligé et a le signe de ce terme. Or ce terme est positif; donc l'erreur $f(x) - f_4(x)$ est encore positive et l'on a

$$f(x) - f_4(x) < \frac{x^{12}}{2.3.5.6.8.9.11.12}.$$

4° Pour $x = -2$, nous avons

$$f_4(-2) = 1 - \frac{2^3}{2.3} + \frac{2^6}{2.3.5.6} - \frac{2^9}{2.3.5.6.8.9}$$

$$= 1 - \frac{4}{3} + \frac{16}{45} - \frac{16}{405} = -\frac{7}{405}.$$

ou, en décimales,

$$f_4(-2) = -0{,}0173\ldots,$$

valeur approchée par défaut.

L'erreur commise est moindre que

$$\frac{2^{12}}{2.3.5.6.8.9.11.12} \quad \text{ou} \quad \frac{32}{13\,365};$$

ceci est moindre que 0,0024.

Par suite, la somme de la série est comprise entre $-0{,}0173$ et $-0{,}0149$; cette somme est $-0{,}01$ à $\frac{1}{100}$ près.

Pour $x = -1$,

$$f_4(-1) = \frac{10\,871}{12\,960} = 0{,}838811\ldots.$$

L'erreur est moindre que

$$\frac{1}{2.3.5.6.8.9.11.12} \quad \text{ou que} \quad \frac{1}{10^6};$$

la somme de la série est comprise entre 0,838811 et 0,838812.

Pour $x = +1$,

$$f_4(1) = \frac{15\,193}{12\,960} = 1{,}1722993\ldots.$$

L'erreur est moindre que

$$\frac{1}{2.3.5.6.8.9(11.12-1)} \quad \text{ou que} \quad \frac{6}{10^7}.$$

La somme de la série est comprise entre 1,1722993 et et 1,1722999.

Enfin, pour $x = +2$,

$$f_4(2) = \frac{221}{81} = 2,7283\ldots.$$

L'erreur est moindre que

$$\frac{2^{12}}{2.3.5.6.8.9(11.12-2^3)} \quad \text{ou que} \quad 0,0026.$$

La somme de la série est comprise entre 2,7283 et 2,7309.

81. *Combien de termes doit-on prendre dans la série qui a pour terme général* $u_n = \frac{1}{n^3}$, *si l'on veut calculer la valeur de la série à un dix-millième près?*

(*École Polytechnique*, 1914.)

On s'appuie sur la double inégalité

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < S - S_n < \int_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^3},$$

ou

$$\frac{1}{2(n+1)^2} < S - S_n < \frac{1}{2n^2}.$$

$S_n + \frac{1}{2(n+1)^2}$ est une valeur approchée de S par défaut, l'erreur étant moindre que $\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(n+1)^2}$.

Pour calculer S à $\frac{1}{10^4}$ près, il suffit que l'on ait

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(n+1)^2} < \frac{1}{10^4},$$

ou, *a fortiori*,

$$\frac{1}{n^3} < \frac{1}{10^4}, \qquad n \geqslant 22.$$

Il suffit donc de prendre 22 termes, et d'ajouter à leur somme $\frac{1}{2.23^2}$.

82. *Calculer à* $\frac{1}{10\,000}$ *près la valeur numérique de la série*

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{2.5^2} + \frac{1}{3.5^3} - \frac{1}{4.5^4} + \dots,$$

dont le terme général est $\frac{(-1)^{n-1}}{n.5^n}$.

(*Ecole des Ponts et Chaussées*, 1907.)

On trouve 0,1823.

On peut remarquer que la somme de la série donnée est égale à $L(1 + \frac{1}{5})$ ou L1,2.

83. *Calculer à* $\frac{1}{10\,000}$ *près les valeurs de x et de y données par les relations*

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3.2^3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7.2^7} + \dots,$$

$$y = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots.$$

(*Agrégation*, 1876.)

Réponse : $x = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236,$

$$y = e^{-\frac{\pi}{6}} = 0{,}5924.$$

84. 1° *Développer en série entière la fonction* $y = \operatorname{ch} x \cos x$.

2° *En déduire la valeur de la fonction pour* $x = 1$ *à* $\frac{1}{10^7}$ *près.*

1° On obtient la série

$$1 - \frac{4}{4!}x^4 + \frac{4^2}{8!}x^8 + \ldots + (-1)^n \frac{4^n}{(4n)!}x^{4n} + \ldots$$

2° La valeur demandée est

$$0{,}8337300,$$

à $\frac{1}{10^7}$ par défaut.

85. *Étudier la nature de la série*

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots.$$

Calculer sa valeur à $\frac{1}{10^6}$ *près pour* $x = \frac{1}{10}$.

(*Certificat de Mathématiques générales, Caen*, 1908.)

La valeur demandée est 0,095310.

86. *Appliquer le développement en série de* e^x *au calcul de* $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ *avec trois décimales.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Caen*, 1911.)

Réponse : 0,513.

87. *Soit l'intégrale définie*

$$y = \int_0^x \cos(kz^2)\,dz.$$

Peut-on trouver rapidement, pour les valeurs positives de $k \leqslant 1$,

et les valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, un polynome en x,

$$Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

où n soit un entier aussi petit que possible, et qui représente y avec une erreur moindre que 0,001?

On pourra s'aider pour les calculs numériques de la table de logarithmes, en prenant $\pi = 3{,}1416$.

Traiter ensuite le même problème pour $k \leqslant 1$ et les valeurs de x comprises non plus entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, mais entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

(*École des Ponts et Chaussées*, 1912.)

Pour $0 < x < \frac{\pi}{4}$, on a

$$Y = x - \frac{k^2 x^5}{10},$$

et pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

$$Y = \frac{x}{1} - \frac{k^2 x^5}{2!5} + \frac{k^4 x^9}{4!9} - \frac{k^6 x^{13}}{6!13} + \frac{k^8 x^{17}}{8!17}.$$

CHAPITRE V

INTÉGRALES

88. *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *on considère l'ellipse qui a pour axes* Ox, Oy *et pour sommets deux points* A, B *respectivement situés sur* Ox, Oy *et tels que* $OA = 10^m$, $OB = 5^m$, *puis l'hyperbole ayant pour axes* Ox, Oy, *pour foyer le point* A *et pour sommet le milieu* A′ *du segment* OA.

1° *Calculer, à un décimètre carré près, l'aire qui se trouve à la fois à l'intérieur de l'ellipse et entre les deux branches de l'hyperbole.*

2° *Calculer, à un décimètre cube près, le volume engendré par cette aire tournant autour de* Ox.

3° *En désignant par* P *et* P′ *les deux points d'intersection de l'ellipse avec la branche d'hyperbole qui passe par* A′, *calculer l'abscisse du centre de gravité de l'aire supposée homogène que limitent l'arc d'ellipse* PAP′ *et l'arc d'hyperbole* PA′P′.

(*Certificat de Mathématiques générales, Caen*, 1913.)

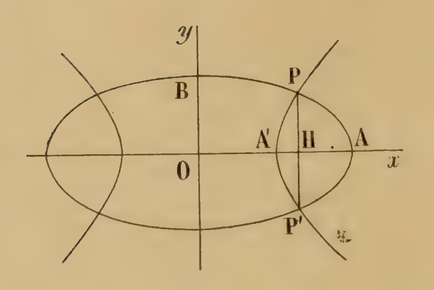
Les équations de l'ellipse et de l'hyperbole sont respectivement

$$x^2 + 4y^2 - 100 = 0, \qquad 3x^2 - y^2 - 75 = 0,$$

ou, en ne considérant que les branches BPA et A′P,

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{100 - x^2},$$

$$y = \sqrt{3}\sqrt{x^2 - 25}.$$



En résolvant les équations des deux courbes, on trouve aisément que les coordonnées du point P sont

$$\alpha = \frac{20}{\sqrt{13}}, \qquad \beta = \frac{15}{\sqrt{13}}.$$

1° L'aire demandée S est égale à quatre fois l'aire OA′PB, et celle-ci est égale à

$$\text{aire OHPB} - \text{aire A′HP}.$$

On a donc

$$S = 4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\sqrt{100 - x^2}\,dx - \sqrt{3}\int_5^{\alpha}\sqrt{x^2 - 25}\,dx\right).$$

De la formule bien connue

$$\int\sqrt{ax^2 + k}\,dx = \frac{x\sqrt{ax^2 + k}}{2} + \frac{k}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + k}},$$

on déduit

$$\int\sqrt{100 - x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{100 - x^2}}{2} + 50\int\frac{dx}{\sqrt{100 - x^2}},$$

$$\int\sqrt{x^2 - 25}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2 - 25}}{2} - \frac{25}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}},$$

ou

$$\int\sqrt{100 - x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{100 - x^2}}{2} + 50\,\text{arc sin}\,\frac{x}{10},$$

$$\int\sqrt{x^2 - 25}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2 - 25}}{2} - \frac{25}{2}\,\mathrm{L}\left(x + \sqrt{x^2 - 25}\right).$$

Les intégrales définies sont alors

$$\int_0^\alpha \sqrt{100-x^2}\,dx = \frac{\alpha\sqrt{100-\alpha^2}}{2} + 50 \arcsin\frac{\alpha}{10},$$

$$\int_5^\alpha \sqrt{x^2-25}\,dx = \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2-25}}{2} - \frac{25}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-25}}{5},$$

ou, en remplaçant α par sa valeur $\frac{20}{\sqrt{13}}$,

$$\int_0^\alpha \sqrt{100-x^2}\,dx = \frac{300}{13} + 50 \arcsin\frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$\int_5^\alpha \sqrt{x^2-25}\,dx = \frac{50\sqrt{3}}{13} - \frac{25}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{13}}.$$

Remplaçons ces intégrales par leurs valeurs dans l'expression de S, nous obtenons

$$S = 100\left(\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right).$$

Calculons d'abord $\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}$ en grades. On a

$$\log 13 = 1,11394, \qquad \log\sqrt{13} = 0,55697,$$

$$\begin{array}{rl} \log 2 = & 0,30103 \\ -\log\sqrt{13} = & \bar{1},44303 \\ \hline \log\frac{2}{\sqrt{13}} = & \bar{1},74406 \end{array} \qquad \Delta = 11$$

$$\begin{array}{rr} 2 & 37,43 \\ \hline 4 & \\ 3,3 & 3 \\ \hline 0,7 & 6 \end{array}$$

La valeur cherchée en grades est 37,4336 ; on a donc en radians

$$\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{\pi}{200} \times 37,4336.$$

Pour faire ce produit on peut faire une multiplication abrégée, comme nous l'avons montré au tome I (n° 23); on peut aussi utiliser les multiples de $\frac{\pi}{200}$, qui sont donnés dans la plupart des tables de logarithmes (*). C'est la méthode que nous allons suivre; nous aurons à faire l'addition suivante :

$$\begin{array}{l} 0,47124 \\ 0,109956 \\ 0,0062832 \\ 0,00047124 \\ 0,000047124 \\ 0,0000094248 \\ \hline 0,5880069888 \end{array}$$

et nous avons

$$\text{arc}\sin\frac{2}{\sqrt{13}} = 0,58801.$$

Calculons maintenant

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{L}\frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{3}}{2\mathrm{M}}\log\frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{13}}.$$

On a

$$\begin{array}{r} \log(4+\sqrt{3}) = \log 5,7320 = 0,75831 \\ -\log\sqrt{13} = \bar{1},44303 \\ \hline \log\frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = 0,20134 \end{array}$$

puis

$$\log u = \frac{1}{2}\log 3 + \log\log\frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{13}} - \log 2 - \log \mathrm{M}.$$

(*) On trouvera ces multiples à la fin du volume.

$\Delta = 22$

2 013	3 0384
4	8,8

$$\log \log \frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \bar{1},30393$$

$$\frac{1}{2}\log 3 = 0,23856$$

$$-\log 2 = \bar{1},69897$$

$$-\log M = 0,36222$$

$\Delta = 11$

$$\log u = \bar{1},60368$$

58	4 014
10	9

$$u = 0,40149$$

$$\text{arc sin}\,\frac{2}{\sqrt{13}} = 0,58801$$

$$\text{arc sin}\,\frac{2}{\sqrt{13}} + u = 0,98950$$

et par suite

$$S = 98^{m^2},950.$$

2° Le volume demandé V est égal à deux fois la différence des volumes engendrés par les aires OHPB et A′HP en tournant autour de Ox. On a donc

$$V = 2\pi\left[\frac{1}{4}\int_0^\alpha (100 - x^2)\,dx - 3\int_5^\alpha (x^2 - 25)\,dx\right].$$

Ces intégrales se calculent facilement ; on trouve successivement

$$\int (100 - x^2)\,dx = 100x - \frac{x^3}{3}, \quad \int_0^\alpha (100 - x^2)\,dx = 100\alpha - \frac{\alpha^3}{3},$$

$$\int (x^2 - 25)\,dx = \frac{x^3}{3} - 25x, \quad \int_5^\alpha (x^2 - 25)\,dx = \frac{\alpha^3}{3} - 25\alpha + \frac{250}{3},$$

et

$$V = \pi\left(200\alpha - \frac{13\alpha^3}{6} - 500\right),$$

et enfin, en remplaçant α par sa valeur,

$$V = 1\,000\pi\left(\frac{8}{3\sqrt{13}} - \frac{1}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \log 8 &= 0,90309 \\ -\log 3 &= \bar{1},52288 \\ -\log\sqrt{13} &= \bar{1},44303 \\ \hline \log\frac{8}{3\sqrt{13}} &= \bar{1},86900 \\ \frac{8}{3\sqrt{13}} &= 0,73960 \\ \frac{8}{3\sqrt{13}} - \frac{1}{2} &= 0,23960 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{8}{3\sqrt{13}} - \frac{1}{2}\right) &= \bar{1},37949 \\ \log\pi &= 0,49715 \\ \hline \log\frac{V}{1\,000} &= \bar{1},87664 \end{aligned} \qquad \Delta = 6$$

$$\begin{array}{rr} 2 & 7527 \\ \hline 2 & \\ 1,8 & 3 \\ \hline 0,2 & 3 \end{array}$$

$$\frac{V}{1\,000} = 0,752733.$$

On a donc

$$V = 752^{m^3},733.$$

3° Posons

$$S_1 = \text{aire } A'HP, \qquad S_2 = \text{aire } HAP.$$

Le centre de gravité de l'aire PA′P′AP est sur Ox, et il a même abscisse que le centre de gravité de l'aire $S_1 + S_2$.

Soient x_1, x_2 les abscisses des centres de gravité des aires S_1, S_2; le centre de gravité de l'aire $S_1 + S_2$ a pour abscisse

$$X = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2}.$$

Or $S_1 + S_2$ est le quart de la différence entre l'aire de l'ellipse, 50π ou $\frac{100\pi}{2}$, et l'aire S calculée dans la première partie ; donc

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{100\pi}{2} - 98,950\right) = 14,53.$$

D'autre part, on a

$$S_1 x_1 = \int_5^\alpha x\sqrt{3}\sqrt{x^2 - 25}\,dx, \qquad S_2 x_2 = \int_\alpha^{10} x\frac{1}{2}\sqrt{100 - x^2}\,dx.$$

Mais
$$\int x\sqrt{x^2-25}\,dx=\frac{1}{3}(x^2-25)^{\frac{3}{2}},$$
$$\int x\sqrt{100-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}(100-x^2)^{\frac{3}{2}},$$
donc
$$S_1x_1+S_2x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha^2-25)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{6}(100-\alpha^2)^{\frac{3}{2}},$$

ou, en remplaçant α par sa valeur $\frac{20}{\sqrt{3}}$ et en simplifiant,
$$S_1x_1+S_2x_2=\frac{375}{\sqrt{13}}.$$

On a, par suite,
$$X=\frac{375}{\sqrt{13}.14,53}.$$
$$\log 375=2,57403$$
$$-\log\sqrt{13}=\bar{1},44303$$
$$-\log 14,53=\bar{2},83773$$
$$\log X=0,85479$$
$$X=7^{\text{m}},158.$$

89. *Étant donnée une parabole dont le sommet* O *et le foyer* F *sont distants de* 1^{m}, *on considère la corde* AFB *perpendiculaire en* F *sur* OF, *et l'on demande de calculer :*

1° *En décimètres carrés l'aire de la portion de paraboloïde engendrée par la rotation de l'arc* OA *tournant autour de* OF;

2° *En décimètres cubes le volume du solide engendré par la rotation de l'aire* FAOF *autour de* OF ;

3° *En décimètres la longueur de l'arc* AOB *de la parabole.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Bordeaux,* 1911.)

L'équation de la parabole est
$$y^2=4x,\qquad \text{ou}\qquad y=2\sqrt{x}.$$

1° L'aire demandée S est donnée par la formule

$$S = 2\pi \int_0^1 y ds.$$

Or

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{x}}, \qquad ds^2 = dx^2\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

et

$$S = 2\pi \int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx = 4\pi \int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx.$$

Mais on a

$$\int \sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}},$$

par suite

$$S = \frac{8\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1) = 15^{m^2},31.$$

2° Le volume cherché V a pour valeur

$$V = \pi \int_0^1 y^2 dx = 4\pi \int_0^1 x dx = 2\pi = 6^{m^3},283.$$

3° La longueur l de l'arc AOB est

$$l = 2\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx,$$

On peut écrire

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}\,dx$$

$$= \int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}},$$

ou

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx = \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x}\right)$$

On en déduit

$$l = 2[\sqrt{2} + \mathrm{L}(1 + \sqrt{2})].$$

On a

$$\sqrt{2} = 1{,}41421, \qquad 1 + \sqrt{2} = 2{,}41421;$$

nous en tirons

$$\log(1 + \sqrt{2}) = 0{,}38278, \qquad \mathrm{L}(1 + \sqrt{2}) = \frac{1}{\mathrm{M}} . 0{,}38278.$$

Nous calculons ce produit en utilisant les multiples de $\frac{1}{\mathrm{M}}$ (73), et nous obtenons

$$\mathrm{L}(1 + \sqrt{2}) = 0{,}88138.$$

Par suite,

$$l = 4^{\mathrm{m}},59.$$

90. *On considère l'aire* OABCDO *définie comme il suit :* $\mathrm{OA} = \mathrm{OD} = 2$, $\mathrm{AB} = \mathrm{DC} = \frac{1}{2}$; AB *est parallèle à* O$y$, DC *à* O$x$; BC *est un arc d'hyperbole équilatère dont les asymptotes sont* Ox, Oy. *Déterminer :*

1° *L'aire* OABCDO ;

2° *La position du centre de gravité de cette aire supposée homogène ;*

3° *Le volume du solide engendré par l'aire* OABCDO *en tournant autour de* Oy;

4° *La position du centre de gravité de ce volume supposé homogène.*

On calculera ces divers éléments à 0,01 *près.*

On donne $\mathrm{L}2 = 0{,}6931$.

(*Certificat de Mathématiques générales, Dijon*, 1912.)

Abaissons CE perpendiculaire sur Ox. désignons par S_1 l'aire EABC, et par S_2 celle du rectangle OECD ; nous avons aire $\mathrm{OABCDO} = \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 = \mathrm{S}$.

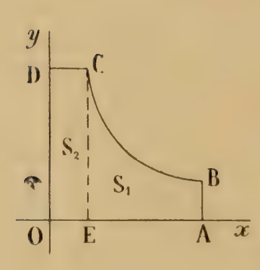
L'équation de l'hyperbole est $xy = 1$.

1° On a

$$S_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x} = 2L2, \qquad S_2 = 1,$$

$$S = 1 + 2L2 = 2,3862.$$

2° L'aire S étant symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle xOy, le centre de gravité de cette aire est situé sur cet axe de symétrie; par suite, les coordonnées de ce point sont égales; il suffira de calculer l'abscisse X. On a



$$X = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2},$$

x_1, x_2 étant les abscisses des centres de gravité des aires S_1, S_2. Or,

$$S_1 x_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{2} xy dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} dx = \frac{3}{2}, \qquad x_2 = \frac{1}{4},$$

et par suite

$$X = \frac{7}{4(1 + 2L2)} = 0,73.$$

3° A cause de la symétrie mentionnée, le volume engendré par S en tournant autour de Oy est égal au volume engendré en tournant autour de Ox, et ce volume V est égal à $V_1 + V_2$, V_1, V_2 étant les volumes engendrés par S_1, S_2 en tournant autour de Ox.

On a

$$V_1 = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{2} y^2 dx = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x^2} = \frac{3}{2}\pi, \qquad V_2 = 2\pi,$$

et

$$V = \frac{7\pi}{2} = 10,99.$$

4° Le centre de gravité du volume V est sur Ox, et son abscisse u est donnée par sa formule

$$u = \frac{V_1 u_1 + V_2 u_2}{V_1 + V_2},$$

u_1, u_2 étant les abscisses des centres de gravité des volumes V_1, V_2. On a

$$V_1 u_1 = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{2} xy^2 dx = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x} = 2\pi \, L2, \qquad u_2 = \frac{1}{4}$$

et

$$u = \frac{2\pi \, L2 + \frac{\pi}{2}}{\frac{7\pi}{2}} = \frac{4L2 + 1}{7} = 0{,}53.$$

On en conclut que le centre de gravité du volume engendré par l'aire S en tournant autour de Oy est le point de Oy qui a pour ordonnée $\frac{4L2 + 1}{7}$.

91. *On considère dans un plan deux axes rectangulaires* Ox, Oy *et les courbes* (C) *et* (C′) *représentées par les équations*

$$y^2 = 9x, \qquad y^2 = 36(x - 3)^3.$$

1° *Tracer ces courbes et déterminer les coordonnées de leurs points communs* A *et* B.

2° *Calculer l'aire de la région du plan limitée par la partie* AOB *de la courbe* (C) *et la portion* AB *de la courbe* (C′).

3° *Évaluer la longueur du contour qui limite cette aire.*

On calculera les résultats avec trois décimales.

(*Certificat de Mathématiques générales*, *Lille*, 1909.)

1° Les coordonnées des points A et B sont (4, 6) et (4, — 6).

2° L'aire est égale à 24,800.

3° La longueur du contour est égale à

$$10 + \frac{9}{2}\mathrm{L}3 + 4 \cdot \frac{(82)^{\frac{3}{2}} - 1}{243} = 27{,}150.$$

92. *On considère la portion de courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$y = \sin x$$

et comprise entre les points d'abscisses $x = 0$ et $x = \pi$; on demande de déterminer :

1° *L'aire comprise entre la courbe et l'axe des x ;*

2° *Le volume engendré par cette aire en tournant autour de Ox;*

3° *L'aire de la surface de révolution limitant ce volume.*

(*Certificat d'Analyse*, *Nancy*, 1897.)

Réponses :

1° 2; 2° $\frac{\pi^2}{2} = 4{,}93480$;

3° $2\pi[\sqrt{2} + \mathrm{L}(1 + \sqrt{2})] = 14{,}423.$

93. *Sur la courbe définie par l'équation*

$$r = \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta},$$

on considère l'arc AO *correspondant aux valeurs de θ comprises entre* 0 *et $\frac{\pi}{4}$. Calculer la distance du pôle au centre de gravité du solide homogène compris à l'intérieur de la surface engendrée par la révolution de l'arc* AO *autour de l'axe polaire.*

(*Certificat de Mathématiques générales*, *Caen*, 1897.)

Réponse :

$$\frac{17 - 24L2}{24L2 - 16} = \frac{1}{24L2 - 16} - 1 = 0{,}574.$$

94. *Le point z décrit dans le plan des z un chemin allant du point $z_0 = i$ au point*

$$z_1 = 1 + \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)i$$

sur une chaînette symétrique par rapport à l'axe des y.

Calculer la longueur de ce chemin à 0,001 près.

(*Certificat d'Analyse, Marseille*, 1905.)

On trouve

$$\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) = 1{,}175.$$

95. *Calculer la valeur de l'intégrale*

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{I} = \int_0^a \sin^2 x dx = \frac{a}{2} - \frac{\sin 2a}{4},$$

sachant que a est le plus petit angle positif dont la tangente est donnée par

$$\operatorname{tg} a = 2{,}017.$$

(*École Navale*, 1912.)

Dans la formule (1), a désigne la valeur de l'angle en radians ; on trouve aisément que la valeur en grades est 70,6983. On en déduit

$$a = \frac{\pi}{200} \times 70{,}6983,$$

et l'on trouve

$$\frac{a}{2} = 0{,}55526, \qquad \frac{\sin 2a}{4} = 0{,}19899$$

et

$$\mathrm{I} = 0{,}35627.$$

96. *Trouver à l'aide des tables de logarithmes la valeur numérique de l'intégrale*

$$J = \int_0^\alpha \cos^3\omega\, d\omega, \qquad pour \qquad \alpha = 53^\circ\, 27'\, 11''.$$

Quelle doit être la valeur de α *pour que* J *soit égal à* $\frac{2}{3}$?

(*École des Ponts et Chaussées*, 1908.)

On trouve aisément

$$J = \sin\alpha - \frac{1}{3}\sin^3\alpha;$$

puis

$$\log \sin\alpha = \bar{1},90492,$$
$$\log \frac{1}{3}\sin^3\alpha = \bar{1},23764;$$

on en déduit

$$\sin\alpha = 0,80338,$$
$$\frac{1}{3}\sin^3\alpha = 0,17284$$

et

$$J = 0,63054.$$

Pour que J soit égal à $\frac{2}{3}$, il faut que α soit égal à $\frac{\pi}{2}$.

97. *Calculer à* $\frac{1}{10\,000}$ *près l'intégrale définie*

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx.$$

(*Certificat de Mathématiques générales, Bordeaux*, 1912.

En faisant le changement de variable $\sqrt{1+x^2} = u$, on voit aisément que l'intégrale indéfinie est

$$\sqrt{1+x^2} + \mathrm{L}\,\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x};$$

par suite, l'intégrale définie est

$$\sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + L\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}-2} = 0,8584,$$

à $\frac{1}{10\,000}$ près.

98. *Calculer à* $\frac{1}{1\,000}$ *près l'aire commune aux deux ellipses*

$$\frac{x^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{12} - 1 = 0; \qquad \frac{x^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{4} - 1 = 0.$$

(*Certificat de Mathématiques générales, Bordeaux*, 1910.)

Cette aire est égale à l'intégrale

$$4\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\sqrt{3-x^2} + \sqrt{1-x^2} - 2)\,dx = \frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3},$$

dont la valeur à $\frac{1}{1\,000}$ près est 1,772.

99. *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{\cos^2\theta}}\,d\theta.$$

(*Certificat d'Analyse, Bordeaux*, 1908.)

En posant $\sin\theta = t$, on est conduit à l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{25-9t^2}}{4(1-t^2)}\,dt,$$

puis, en posant

$$\sqrt{25-9t^2} = (5-3t)\,u,$$

on obtient

$$-\frac{75}{8}\int_1^{\frac{a}{b}} \frac{u^2du}{(u^2-4)\left(u^2-\frac{1}{4}\right)(u^2+1)}, \qquad \begin{cases} a=\sqrt{5\sqrt{2}+3}, \\ b=\sqrt{5\sqrt{2}-3}. \end{cases}$$

Pour intégrer cette fonction rationnelle nous décomposons en éléments simples, et nous avons

$$-\frac{75}{8}\cdot\frac{u^2}{(u^2-4)\left(u^2-\frac{1}{4}\right)(u^2+1)} =$$

$$\frac{-2}{u^2-4}+\frac{1}{2\left(u^2-\frac{1}{4}\right)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+u^2}.$$

L'intégrale indéfinie est alors

$$-\frac{1}{2}\mathrm{L}\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+\frac{1}{2}\mathrm{L}\left|\frac{u-\frac{1}{2}}{u+\frac{1}{2}}\right|+\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg} u$$

ou

$$\frac{1}{2}\mathrm{L}\left|\frac{(2u-1)(u+2)}{(2u+1)(u-2)}\right|+\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg} u,$$

et l'intégrale définie

$$\frac{1}{2}\mathrm{L}\left|\frac{2a^2+3ab-2b^2}{2a^2-3ab-2b^2}\right|+\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}-\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg} 1,$$

Or, des formules connues

$$\operatorname{arc\,tg}\alpha-\operatorname{arc\,tg}\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}, \qquad 2\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}$$

on déduit successivement

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}-\operatorname{arc\,tg}1=\operatorname{arc\,tg}\frac{a-b}{a+b},$$

$$2\operatorname{arc\,tg}\frac{a-b}{a+b}=\operatorname{arc\,tg}\frac{a^2-b^2}{2ab}.$$

L'intégrale prend alors la forme

$$\frac{1}{2} \mathrm{L} \left| \frac{2a^2 + 3ab - 2b^2}{2a^2 - 3ab - 2b^2} \right| + \frac{3}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{a^2 - b^2}{2ab}.$$

Si nous remplaçons alors a par $\sqrt{5\sqrt{2}+3}$ et b par $\sqrt{5\sqrt{2}-3}$, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \mathrm{L} \frac{\sqrt{41}+4}{\sqrt{41}-4} + \frac{3}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{\sqrt{41}}.$$

Posons $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$, nous trouvons $\alpha = 35^g,5480$,

et

$$\frac{\sqrt{41}+4}{\sqrt{41}-4} = \operatorname{tg}(\alpha + 50) = \operatorname{tg} 85^g,5480.$$

Nous en tirons

$$\log \frac{\sqrt{41}+4}{\sqrt{41}-4} = 0,63640,$$

$$\mathrm{L} \frac{\sqrt{41}+4}{\sqrt{41}-4} = \frac{1}{\mathrm{M}} \times 0,63640 = 1,46536.$$

D'autre part, l'angle qui a pour tangente $\frac{3}{\sqrt{41}}$ est en grades 27,8933, et en radians

$$\frac{\pi}{200} \times 27,8933, \qquad \text{ou} \qquad 0,43815.$$

On en déduit que la valeur de l'intégrale est

$$1,0613.$$

100. *Calculer l'intégrale*

$$\int_2^3 \frac{(x^3+1)\,dx}{(x+1)\sqrt{x^2-3x+2}}.$$

(*Certificat d'Analyse, Besançon*, 1903.)

On peut écrire successivement

$$\frac{(x^3+1)}{(x+1)\sqrt{x^2-3x+2}}=\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}=\frac{x^2-3x+2+2x-3+2}{\sqrt{x^2-3x+2}}.$$

$$=\sqrt{x^2-3x+2}+\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+2}}+\frac{2}{\sqrt{x^2-3x+2}}.$$

On en déduit l'intégrale indéfinie

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{x^2-3x+2}-\frac{1}{8}\mathrm{L}\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right|$$

$$+2\sqrt{x^2-3x+2}+2\mathrm{L}\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right|,$$

et l'intégrale définie

$$\frac{11\sqrt{2}+15\mathrm{L}(1+\sqrt{2})}{4}=7,194.$$

101. *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{(3\sin^2 x+4\sin x+1)\sqrt{\sin x}}.$$

(*École Centrale*, 1920.)

En posant $\sqrt{\sin x}=t$ on est conduit à intégrer une fonction rationnelle de t.

La valeur de l'intégrale définie est $\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{4}$, ou 1,0284.

102. *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}$$

à $\frac{1}{10\,000}$ *près.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Rennes*, 1905.)

En décomposant $\frac{1}{1+x^3}$ en éléments simples, on trouvera aisément que l'intégrale indéfinie est

$$\frac{1}{3}\left[\mathrm{L}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right].$$

Par suite l'intégrale définie est égale à

$$\frac{1}{3}\left(\mathrm{L}2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \qquad \text{ou} \qquad 0,8356.$$

103. *Calculer à* 0,01 *près les intégrales*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^4 x\,dx, \qquad \int_0^1 x^2 e^x\,dx.$$

(*Certificat de Mathématiques générales, Paris*, 1904.)

On trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^4 x\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} = 0,118,$$

$$\int_0^1 x^2 e^x\,dx = e - 2 = 0,718.$$

104. *Calculer à* 0,01 *près les intégrales*

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+5}, \qquad \mathrm{I}_2 = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}},$$

$$\mathrm{I}_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx, \qquad \mathrm{I}_4 = \int_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{1-x^2}}.$$

(*Certificat de Mathématiques générales, Paris*, 1905.)

On trouve

$$I_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{1}{2} = 0{,}785 - 0{,}232 = 0{,}55,$$

$$I_2 = \pi = 3{,}14, \qquad I_3 = \pi - 2 = 1{,}14,$$

$$I_4 = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 0{,}36.$$

105. *Évaluer l'intégrale*

$$\int_0^{\alpha} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}},$$

et calculer sa valeur à $\frac{1}{100}$ *près quand* $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(*École Polytechnique*, 1906.)

On trouve

$$\int_0^{\alpha} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \text{arc tg}\,\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

et pour $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, l'intégrale est égale à $\frac{\pi}{6}$ ou 0,52.

106. *Calculer l'intégrale*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x\cos\varphi + x^2}}$$

pour $\varphi = 32^\circ\,46'$.

(*Certificat d'Analyse, Nancy*, 1904.)

On trouve

$$L\left(\cot\frac{\varphi}{4}\cot\frac{\pi-\varphi}{4}\right) = 2{,}2282.$$

107. *Calculer à* $\frac{1}{100}$ *près l'intégrale*

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(4\cos x+5)^2}.$$

(*Certificat de Mathématiques générales*, *Paris*, 1905.)

On trouve $\frac{5\pi}{27}=0{,}5817$.

Calcul approché d'une intégrale définie.

108. Pour calculer l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ quand on ne connaît pas une fonction primitive de $f(x)$, on a recours à des méthodes d'approximation qui permettent d'obtenir des valeurs approchées de l'intégrale envisagée.

Considérons la courbe représentée par l'équation $y=f(x)$; soient M_0, M les points de cette courbe qui ont pour abscisses a, b, abaissons M_0P_0, MP perpendiculaires sur Ox. L'intégrale définie est égale à l'aire limitée par l'arc de courbe M_0M et les droites M_0P_0, P_0P, MP. Tout revient à calculer une valeur approchée de cette aire.

Nous supposerons que $f(x)$ a un signe constant dans l'intervalle (a, b); si cela n'avait pas lieu, on décomposerait cet intervalle en intervalles partiels dans chacun desquels $f(x)$ aurait le même signe. Nous supposerons aussi $f(x)>0$; le calcul serait analogue pour $f(x)<0$.

109. Méthode des trapèzes. — Divisons la longueur P_0P en n parties égales au moyen des points P_1, P_2, ... P_{n-1}, et par ces points menons des parallèles à Oy rencontrant la courbe aux points M_1, M_2, ... M_{n-1}; puis traçons les droites M_0M_1, M_1M_2, ... $M_{n-1}M$. Nous formons ainsi n trapèzes, dont la somme des aires est une valeur approchée de l'intégrale définie.

Comme $P_0P = b - a$, tous les trapèzes ont pour hauteur commune $\frac{b-a}{n} = h$. Désignons par $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ les ordonnées des points $M_0, M_1, M_2, \ldots M$; les aires des trapèzes sont respectivement égales à

$$\frac{h}{2}(y_0 + y_1), \qquad \frac{h}{2}(y_1 + y_2), \quad \ldots \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n).$$

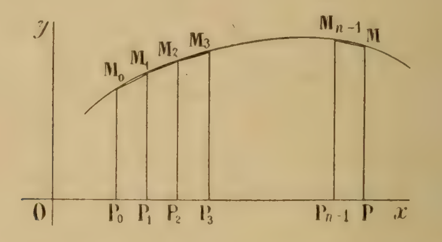
Leur somme est alors égale à

$$A = \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + y_n].$$

Telle est la valeur approchée de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Si $f''(x)$ est négatif dans l'intervalle (a, b), la courbe tourne



sa concavité vers les y négatifs (c'est le cas de la figure), A est une valeur approchée par défaut.

Si $f''(x)$ est positif dans l'intervalle (a, b), A est une valeur approchée par excès.

110. Méthode de Simpson. — On divise P_0P en un nombre pair de parties égales, soit $2n$, et on pose $h = \frac{b-a}{2n}$; on désigne par $P_1, P_2, \ldots P_{2n-1}$ les points de division et par $M_1, M_2, \ldots M_{2n-1}$ les points correspondants de la courbe.

Par les trois points M_0, M_1, M_2 on peut faire passer un arc de parabole à axe parallèle à Oy ; l'aire limitée par cet arc et les droites M_0P_0, P_0P_2, P_2M_2 est

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

On fait de même avec les trois points suivants M_2, M_3, M_4, et on obtient l'aire

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

et ainsi de suite jusqu'aux trois derniers points M_{2n-2}, M_{2n-1}, M qui donnent l'aire

$$\frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

La somme de toutes ces aires est

$$B = \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + y_{2n}].$$

C'est une valeur approchée de l'intégrale définie.

111. Méthode de Poncelet. — Comme dans la méthode de Simpson, nous divisons P_0P en $2n$ parties égales et nous conservons les mêmes notations.

Nous supposons de plus que $f''(x)$ a un signe constant dans l'intervalle (a, b), par exemple $f''(x) < 0$ (c'est le cas de la figure).

La tangente en chaque point M_{2p-1} *à indice impair* forme avec les ordonnées des points M_{2p-2}, M_{2p} et l'axe des x un trapèze dont l'aire est égale à $2hy_{2p-1}$, et la somme des aires de ces trapèzes est

$$S = 2h(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1}),$$

que nous écrirons

$$S = 2hI,$$

en posant

$$I = y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{2n-1}.$$

S est une valeur approchée par excès de l'intégrale définie.

D'autre part, les segments rectilignes M_0M_1, M_1M_3, M_3M_5, ..., $M_{2n-3}M_{2n-1}$, $M_{2n-1}M$ forment avec les ordonnées des points M_0, M_1, M_3, M_5, ..., M_{2n-1}, M et l'axe des x de nouveaux trapèzes dont la somme des aires est

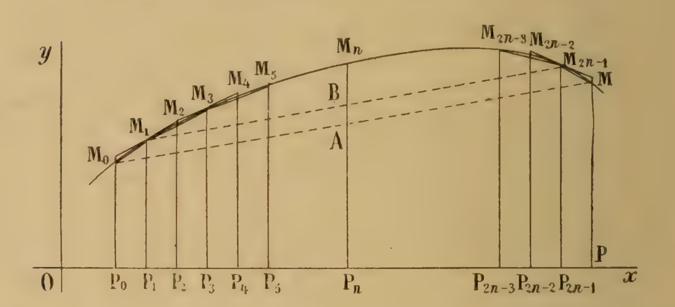
$$S' = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + h(y_1 + y_3) + h(y_3 + y_5) + \dots$$
$$+ h(y_{2n-3} + y_{2n-1}) + \frac{h}{2}(y_{2n-1} + y_{2n}),$$

ou

$$S' = 2hI + \frac{h\Delta}{2},$$

en posant $\Delta = y_0 + y_{2n} - y_1 - y_{2n-1}$.

S′ est une valeur approchée par défaut de l'intégrale.



Si $f''(x)$ était positif dans l'intervalle (a, b), S serait approchée par défaut et S′ par excès.

Dans tous les cas, l'intégrale est comprise entre S et S′.

La méthode de Poncelet consiste à prendre pour valeur de l'intégrale la quantité

$$U = \frac{S + S'}{2} = 2hI + \frac{h\Delta}{4}.$$

On ne sait pas si cette valeur est approchée par défaut ou par excès, mais on peut déterminer une limite supérieure

de l'erreur commise. En effet, la différence entre U et l'intégrale est inférieure en valeur absolue à

$$\left|\frac{S - S'}{2}\right|, \quad \text{c'est-à-dire à} \quad \left|\frac{h\Delta}{4}\right|.$$

En résumé, la méthode de Poncelet donne la valeur approchée par défaut ou par excès

$$U = 2hI + \frac{h\Delta}{4},$$

l'erreur commise étant moindre que $\left|\frac{h\Delta}{4}\right|$.

Comme Δ est égal à $y_0 + y_{2n} - y_1 - y_{2n-1}$, on peut calculer à l'avance $\left|\frac{h\Delta}{4}\right|$ pour déterminer l'approximation ; on peut même chercher à calculer h ou $2n$ pour que $\left|\frac{h\Delta}{4}\right|$ soit inférieur à un nombre donné arbitrairement.

En outre, pour calculer U, il suffit de déterminer les ordonnées à indice impair $y_1, y_3, y_5, \dots y_{2n-1}$.

Remarquons enfin que les droites M_0M, M_1M_{2n-1} rencontrent l'ordonnée du milieu M_nP_n aux points A, B qui ont pour ordonnées $\frac{y_0 + y_{2n}}{2}$, $\frac{y_1 + y_{2n-1}}{2}$; on a donc

$$\overline{AB} = -\frac{\Delta}{2};$$

par suite l'erreur commise est inférieure à l'aire du rectangle qui a pour côtés AB et $\frac{h}{2}$.

112. *Calculer aussi exactement que possible, à l'aide des tables à cinq décimales, les valeurs de l'expression*

$$(1) \qquad y = x(\sin x + 2\cos x),$$

pour $x = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ *grades.*

En déduire approximativement l'aire de la courbe (1) *en coordonnées cartésiennes pour x compris entre* 0 *et* 50 *grades.*
(*École des Ponts et Chaussées*, 1911.)

Dans la formule (1) x représente la valeur de l'angle en radians ; si nous désignons par u sa valeur en grades, nous avons

$$y = \frac{\pi u}{200}(\sin u + 2\cos u).$$

Soit φ l'angle aigu dont la tangente est égale à 2 ; la valeur de y prend la forme

$$y = \frac{\pi u}{200} \cdot \frac{\sin(u+\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Nous désignerons par $y_0, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{40}, y_{50}$ les valeurs de y correspondant aux valeurs 0, 10, 20, 30, 40, 50 grades de u.

Nous avons d'abord $y_0 = 0$; pour calculer les autres, nous prenons les logarithmes, et nous avons

$$\log y = \log\frac{\pi}{200\cos\varphi} + \log u + \log\sin(u+\varphi).$$

On peut d'abord calculer séparément la quantité

$$A = \log\frac{\pi}{200\cos\varphi} = \log\pi - \log 200 - \log\cos\varphi,$$

qui est indépendante de u, et l'on a

$$\log y = A + \log u + \log\sin(u+\varphi).$$

Calcul de φ.

		$\Delta = 17$
$\log \text{tg}\,\varphi =$	0,30103	
	097	70,48
	6	
	5,1	3
	0,9	5
$\varphi =$	70,4835	

Calcul de $\log\cos\varphi$.

		$\Delta = 1$
70,49	$\bar{1}$,65042	
6	8,4	
5	0,7	
$\log\cos\varphi =$	$\bar{1}$,65051	

Calcul de A.

$$\log \pi = 0,49715$$
$$-\log 200 = \bar{3},69897$$
$$-\log \cos \varphi = 0,34949$$
$$A = \bar{2},54561$$

Calcul de y_{10}.

$u = 10, \quad u + \varphi = 80,4835$

$$A = \bar{2},54561$$
$$\log u = 1,00000$$
$$\log \sin (u + \varphi) = \bar{1},97927 \qquad \Delta = 13$$
$$\log y_{10} = \bar{1},52488$$

79	3348
9	7

$$y_{10} = 0,33487$$

Calcul de y_{20}.

$u = 20, \quad u + \varphi = 90,4835$

$$A = \bar{2},54561$$
$$\log u = 1,30103$$
$$\log \sin (u + \varphi) = \bar{1},99513 \qquad \Delta = 7$$
$$\log y_{20} = \bar{1},84177$$

3	6946
4	6

$$y_{20} = 0,69466$$

Calcul de y_{30}.

$u = 30, \quad u + \varphi = 100,4835$

$200 - (u + \varphi) = 99,5165$

$$A = \bar{2},54561$$
$$\log u = 1,47712$$
$$\log \sin (u + \varphi) = \bar{1},99999 \qquad \Delta = 41$$
$$\log y_{30} = 0,02272$$

43	1053
29	
28,7	7
0,3	1

$$y_{30} = 1,05371$$

Calcul de y_{40}.

$u = 40, \quad u + \varphi = 110,4835$

$200 - (u + \varphi) = 89,5165$

$$A = \bar{2},54561$$
$$\log u = 1,60206$$
$$\log \sin (u + \varphi) = \bar{1},99409$$
$$\log y_{40} = 0,14176$$
$$y_{40} = 1,38600$$

Calcul de y_{50}.

$u = 50, \quad u + \varphi = 120,4835$

$200 - (u + \varphi) = 79,5165$

$$A = \bar{2},54561$$
$$\log u = 1,69897$$
$$\log \sin (u + \varphi) = \bar{1},97712 \qquad \Delta = 27$$
$$\log y_{50} = 0,22170$$

67	1666
3	
2,7	1
0,3	1

$$y_{50} = 1,66611$$

Comme vérification, on peut calculer y_{50} directement. En effet, en remplaçant dans la formule (1) x par $\frac{\pi}{4}$, on a

$$y_{50} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$$

$$\log 3 = 0,47712$$
$$\log \pi = 0,49715$$
$$-\log 4 = \bar{1},39794$$
$$-\log \sqrt{2} = \bar{1},84949$$
$$\log y_{50} = 0,22170$$

C'est la même valeur que plus haut.

Les valeurs de y sont donc

$$y_0 = 0, \quad y_{10} = 0{,}33487, \quad y_{20} = 0{,}69466,$$
$$y_{30} = 1{,}05371, \quad y_{40} = 1{,}38600. \quad y_{50} = 1{,}66611.$$

Pour calculer l'aire demandée S, on peut appliquer la formule des trapèzes, qui donne ici

$$S = \frac{\pi}{40}[y_0 + 2(y_{10} + y_{20} + y_{30} + y_{40}) + y_{50}],$$

ou

$$S = \frac{\pi}{20}B,$$

en posant

$$B = y_{10} + y_{20} + y_{30} + y_{40} + \frac{1}{2}y_{50}.$$

Calcul de B.

$$y_{10} = 0{,}33487$$
$$y_{20} = 0{,}69466$$
$$y_{30} = 1{,}05371$$
$$y_{40} = 1{,}38600$$
$$\frac{1}{2}y_{50} = 0{,}83305$$
$$B = 4{,}30229$$

Calcul de log B.

4302	63367	$\Delta = 10$
29	2,9	
$\log B = 0{,}63370$		

Calcul de S.

$$\log B = 0{,}63370$$
$$\log \pi = 0{,}49715$$
$$-\log 20 = \bar{2}{,}69897$$
$$\log S = \bar{1}{,}82982$$
$$S = 0{,}67580$$

On peut d'ailleurs calculer directement la valeur de S au moyen de l'intégrale

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\sin x + 2\cos x)\,dx.$$

L'intégrale indéfinie est

$$x(2\sin x - \cos x) + \sin x + 2\cos x;$$

on en déduit aisément

$$S = \frac{\pi + 12}{4\sqrt{2}} - 2 = \frac{15,1416}{4\sqrt{2}} - 2.$$

$\Delta = 28$

1 514	18 013
1	2,8
6	1,68

$$\log(\pi + 12) = 1,18017$$
$$-\log 4 = \bar{1},39794$$
$$-\log\sqrt{2} = \bar{1},84949$$

$\Delta = 16$

$$\log\frac{\pi + 12}{4\sqrt{2}} = 0,42760$$

49	2 676
11	7

$$\frac{\pi + 12}{4\sqrt{2}} = 2,6767,$$

$$S = 0,6767.$$

La méthode des trapèzes nous donne la valeur de l'intégrale à $\frac{1}{1\,000}$ près.

113. *On considère le quadrant* AB *d'une ellipse qui a pour demi-axes* OA $= a$, OB $= b$.

On demande :

1° *De déterminer le pied* M *de la normale qui passe à une distance du centre égale à* $a - b$*;*

2° *De calculer la différence des longueurs des deux arcs* AM *et* MB *en supposant* $a = 3^{m}$, $b = 1^{m}$.

On prendra pour variable le paramètre φ *qui représente un point quelconque de l'ellipse par les formules*

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi.$$

Pour déterminer la position du point M *on formera l'équa-*

tion qui donne la valeur correspondante de φ ; *puis on cherchera cette valeur pour* $a = 3^{\mathrm{m}}$, $b = 1^{\mathrm{m}}$.

On écrira ensuite l'expression des deux intégrales qui représentent les longueurs des arcs AM *et* MB, *et on les calculera en employant cinq trapèzes pour la première et dix pour la seconde : la longueur des arcs sera exprimée en centimètres et l'approximation devra être supérieure au demi-centimètre.*

(*École des Mines de Paris*, 1909.)

1° On verra facilement que la valeur de φ relative au point M est définie par l'égalité

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Dans le cas particulier indiqué, $a = 3$, $b = 1$, cette valeur de φ est égale à $\frac{\pi}{6}$.

2° La différentielle ds de l'arc d'ellipse est dans le cas général

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}\, d\varphi,$$

et pour $a = 3$, $b = 1$,

$$ds = \sqrt{8 \sin^2\varphi + 1}\, d\varphi.$$

Par suite, les arcs AM et MB sont déterminés par les intégrales

$$s_1 = \operatorname{arc} \mathrm{AM} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{8 \sin^2\varphi + 1}\, d\varphi,$$

$$s_2 = \operatorname{arc} \mathrm{MB} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8 \sin^2\varphi + 1}\, d\varphi.$$

Pour calculer ces intégrales par la méthode des trapèzes, nous décomposons le premier intervalle $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ en cinq parties égales, et le deuxième $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ en dix parties égales.

Les nouveaux intervalles obtenus ont tous la même étendue, $\frac{\pi}{30}$, et il nous faudra calculer les valeurs de la fonction

$$u = \sqrt{8 \sin^2 \varphi + 1}$$

pour les valeurs de φ croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ par échelons de $\frac{\pi}{30}$, ou de 0 à 90° par échelons de 6°.

Ces valeurs de φ sont

$$0,\quad 6^\circ,\quad 12^\circ,\quad 18^\circ,\quad 24^\circ,\quad 30^\circ$$

pour la première intégrale, et

$$30^\circ,\ 36^\circ,\ 42^\circ,\ 48^\circ,\ 54^\circ,\ 60^\circ,\ 66^\circ,\ 72^\circ,\ 78^\circ,\ 84^\circ,\ 90^\circ$$

pour la seconde.

Si l'on désigne par

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad u_4,\quad u_5$$

les valeurs de u pour les valeurs de φ de la première série, et par

$$u'_0,\quad u'_1,\quad u'_2,\quad \ldots,\quad u'_9,\quad u'_{10}$$

les valeurs de u pour les valeurs de φ de la deuxième série, nous aurons, d'après la formule bien connue de la méthode des trapèzes,

$$(1) \qquad s_1 = \frac{\pi}{60}[u_0 + 2(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + u_5],$$

$$(2) \qquad s_2 = \frac{\pi}{60}[u'_0 + 2(u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_9) + u'_{10}].$$

Tout revient à déterminer les diverses valeurs de u.

Pour cela, nous calculons un angle aigu α par la formule

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{8} \sin \varphi, \qquad \text{ou} \qquad \log \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \log 8 + \log \sin \varphi;$$

nous avons alors

$$u = \frac{1}{\cos \alpha}, \qquad \log u = -\log \cos \alpha,$$

et de $\log u$ nous déduisons la valeur de u.

Pour calculer $\log \cos \alpha$, connaissant $\log \operatorname{tg} \alpha$, il n'est pas nécessaire de calculer l'angle α, comme nous l'avons vu au nº 96 du tome I; nous suivrons la méthode que nous y avons indiquée.

Pour $\varphi = 0$, on a immédiatement $u_0 = 1$.

Calcul de u_1.

$\frac{1}{2}\log 8 = 0,45155$

$\log \sin 6^\circ = \bar{1},01923$

$\log \operatorname{tg} \alpha = \bar{1},47078$ $\quad\Delta_t = 25$ $\quad\Delta_c =$

$\bar{1},47102$ $\quad\bar{1},98178$

$D = 24$

$22,5$ $\quad 0,9 \times 2 \quad 1,8$

$1,5$ $\quad 0,06 \times 2 \quad 0,12$

$\log \cos \alpha = \bar{1},98180$

$\log u_1 = 0,01820$ $\quad\Delta = 41$

787 $\quad 1042$

33 $\quad 8$

$u_1 = 1,0428$

Calcul de u_2.

$\frac{1}{2}\log 8 = 0,45155$

$\log \sin 12^\circ = \bar{1},31788$

$\log \operatorname{tg} \alpha = \bar{1},76943$ $\quad\Delta_t = 15$ $\quad\Delta_c =$

$\bar{1},76954$ $\quad\bar{1},93548$

$D = 11$

$10,5$ $\quad 0,7 \times 4 \quad 2,8$

$0,5$ $\quad 0,03 \times 4 \quad 0,12$

$\log \cos \alpha = \bar{1},93551$

$\log u_2 = 0,06449$ $\quad\Delta = 37$

6 $\quad 1160$

3 $\quad 1$

$u_2 = 1,1601$

Calcul de u_3.

$\frac{1}{2}\log 8 = 0{,}45155$

$\log \sin 18^\circ = \bar{1}{,}48998$ $\qquad \Delta_t = 14 \qquad \Delta_c = 6$

$\log \operatorname{tg} \alpha = \bar{1}{,}94153$

$\bar{1}{,}94157 \qquad \bar{1}{,}87674$

$D = 4$

$2{,}8 \qquad 0{,}2 \times 6 \quad 1{,}2$

$1{,}2 \qquad 0{,}09 \times 6 \quad 0{,}54$

$\log \cos \alpha = \bar{1}{,}87676$

$\log u_3 = 0{,}12324 \qquad \Delta = 32$

$0 \qquad 1328$

$4 \qquad 1$

$u_3 = 1{,}3281$

Calcul de u_4.

$\frac{1}{2}\log 8 = 0{,}45155 \qquad \Delta_t = 13 \qquad \Delta_c = 8$

$\log \sin 24^\circ = \bar{1}{,}60931$

$\log \operatorname{tg} \alpha = 0{,}06086$

$0{,}06091 \qquad \bar{1}{,}81690$

$D = 5$

$3{,}9 \qquad 0{,}3 \times 8 \quad 2{,}4$

$1{,}1 \qquad 0{,}08 \times 8 \quad 0{,}64$

$\log \cos \alpha = \bar{1}{,}81693$

$\log u_4 = 0{,}18307 \qquad \Delta = 29$

$298 \qquad 1524$

$9 \qquad 3$

$u_4 = 1{,}5243$

Pour $\quad \varphi = 30^\circ, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}, \quad u_5 = \sqrt{3} = 1{,}7321.$

Il est alors facile de calculer la valeur de s_1 donnée par la formule (1).

Nous calculons d'abord la somme

$$A = u_0 + 2(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + u_5 = 12{,}8427;$$

nous en tirons

$$\begin{aligned} \log A &= 1,10866 \\ \log \pi &= 0,49715 \\ -\log 60 &= \bar{2},22185 \\ \hline \log \frac{\pi A}{60} &= \bar{1},82766 \end{aligned} \qquad \Delta = 6$$

3	6 724
3	5

$$s_1 = 0,67245.$$

On formera de même le tableau suivant pour la deuxième série des valeurs de u.

φ	$\log \operatorname{tg} \alpha$	$\log u$	u
30°	»	»	1,7321
36°	0,22077	0,28783	1,9401
42°	0,27706	0.33052	2,1405
48°	0,32262	0,36692	2,3277
54°	0,35951	0,39747	2,4973
60°	0,38908	0,42255	2,6457
66°	0,41228	0,44258	2,7706
72°	0,42976	0,45786	2,8699
78°	0,44195	0,46861	2,9418
84°	0,44916	0,47500	2,9854
90°	»	»	3

Nous calculons ensuite

$$B = u'_0 + 2(u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_9) + u'_{10} = 30,9701,$$

et

$$s_2 = \frac{\pi B}{60} = 2,66875.$$

Nous en tirons

$$s_2 - s_1 = 2{,}66875 - 0{,}67245 = 1{,}99630,$$

ou

$$s_2 - s_1 = 200^{\text{cm}},$$

à un demi-centimètre près.

114. *Calculer l'intégrale*

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx,$$

1° *Par le développement en série;*

2° *Par la méthode des trapèzes avec l'approximation des tables de logarithmes à cinq décimales;*

3° *Par la méthode de Simpson avec la même approximation.*

1° On a pour toutes valeurs de x

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots$$

et, en intégrant de 0 à x,

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \frac{x^9}{4!9} - \cdots.$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient

$$J = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{2!5.2^5} - \frac{1}{3!7.2^7} + \frac{1}{4!9.2^9} - \cdots.$$

En prenant seulement les quatre premiers termes, on trouve pour somme de la série

0,4612

à $\frac{1}{10^4}$ près par défaut, le cinquième chiffre décimal étant 7 ou 8.

2° Appliquons maintenant la méthode des trapèzes en divisant l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ en huit parties égales. Les valeurs de x correspondantes sont

$$0, \frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \frac{4}{16}, \frac{5}{16}, \frac{6}{16}, \frac{7}{16}, \frac{8}{16},$$

et celles de $y = e^{-x^2}$,

$$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8.$$

Nous avons d'abord $y_0 = 1$.

Pour calculer $y_1 = e^{-\frac{1}{16^2}}$, nous écrivons

$$\log y_1 = -\frac{\log e}{16^2} = -\frac{M}{16^2},$$

puis

$$\log|\log y_1| = \log M - 2\log 16.$$

On a

$$\begin{array}{r} \log M = \bar{1}.63778 \\ -2\log 16 = \bar{3},59176 \\ \hline \log|\log y_1| = \bar{3},22954 \end{array} \qquad \Delta = 25$$

$$\begin{array}{rr} 43 & 1\,696 \\ \hline 11 & 4 \end{array}$$

$$\log y_1 = -0{,}0016964 = \bar{1},99830,$$

$$y_1 = 0{,}99610.$$

Nous calculons d'une manière analogue $y_2, y_3, \dots$ en remarquant qu'on obtient $\log|\log y_2|$, $\log|\log y_3|, \dots$ en ajoutant à $\log|\log y_1|$ les logarithmes de $2^2, 3^2, \dots$

La formule des trapèzes donne

$$J = \frac{1}{32}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7) + y_8].$$

Nous avons

$$y_1 = 0,99610,$$
$$y_2 = 0,98448,$$
$$y_3 = 0,96545,$$
$$y_4 = 0,93942,$$
$$y_5 = 0,90696,$$
$$y_6 = 0,86882,$$
$$y_7 = 0,82580,$$

et, en ajoutant,

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_7 = 6,48703.$$

D'où

$$J = \frac{1}{32}[1 + 12,97406 + 0,77880] = \frac{14,75286}{32},$$
$$J = 0,46102.$$

3° La méthode de Simpson donne

$$J = \frac{1}{48}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6) + y_8],$$

ou

$$J = \frac{1}{48}[1 + 14,77724 + 5,58544 + 0,77880],$$

ou enfin

$$J = \frac{22,14148}{48} = 0,46128.$$

La valeur ainsi obtenue est plus approchée que la valeur donnée par la méthode des trapèzes.

115. *Calculer à* $\frac{1}{1\,000}$ *près l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 8},$$

1° *Par la méthode des trapèzes ou la méthode de Poncelet;*

2° *En développant en série la fonction* $\frac{1}{x^3+8}$ *et en intégrant terme à terme.*

(*Certificat de Mathématiques générales*, *Paris*, **1914.**)

1° Posons $f(x) = \frac{1}{x^3+8}$, nous avons

$$f''(x) = \frac{12x(x^3-4)}{(x^3+8)^3};$$

dans l'intervalle (0,1) cette dérivée seconde est toujours négative. Nous appliquerons la méthode de Poncelet (111) en divisant l'intervalle (0,1) en dix parties égales.

Les abscisses des points de division sont 0, 0,1, 0,2,... 0,9, 1 et les ordonnées correspondantes sont

$$y_0 = f(0), \qquad y_1 = f(0,1),$$
$$y_2 = f(0,2), \quad \ldots, \quad y_9 = f(0,9), \qquad y_{10} = f(1).$$

Calculons d'abord la limite supérieure de l'erreur commise $\left|\frac{h\Delta}{4}\right|$, où

$$h = 0,1, \qquad \Delta = y_0 + y_{10} - y_1 - y_9.$$

Nous calculerons chaque ordonnée avec quatre décimales, la quatrième étant augmentée d'une unité si la cinquième est supérieure ou égale à 5; nous commettrons sur chaque ordonnée une erreur inférieure à $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^4}$.

Nous avons

$$y_0 = f(0) = \frac{1}{8} = 0,125, \qquad \text{exactement,}$$

$$y_1 = f(0,1) = \frac{1}{8,001} = 0,1250,$$

$$y_9 = f(0,9) = \frac{1}{8,729} = 0,1146,$$

$$y_{10} = f(1) = \frac{1}{9} = 0,1111,$$

d'où
$$\Delta = -0{,}0035 \quad \text{à } \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{10^4} \text{ près,}$$

et

$$\frac{h\Delta}{4} = -\frac{0{,}00035}{4} = -0{,}0000875 \quad \text{à } \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{10^5} \text{ près,}$$

ou plus simplement

$$\frac{h\Delta}{4} = -0{,}00009 \quad \text{à } \frac{1}{10^5} \text{ près.}$$

Par suite,
$$\left|\frac{h\Delta}{4}\right| < \frac{1}{10^4}.$$

Calculons maintenant

$$U = 2hI + \frac{h\Delta}{4}.$$

Nous avons

$$y_3 = f(0{,}3) = \frac{1}{8{,}027} = 0{,}1246,$$

$$y_5 = f(0{,}5) = \frac{1}{8{,}125} = 0{,}1231,$$

$$y_7 = f(0{,}7) = \frac{1}{8{,}343} = 0{,}1199,$$

et

$$I = y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 = 0{,}6072 \quad \text{à } \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{10^4} \text{ près,}$$

puis

$$2hI = 0{,}12144 \quad \text{à } \frac{5}{10^5} \text{ près,}$$

t enfin

$$U = 2hI + \frac{h\Delta}{4} = 0{,}12144 - 0{,}00009 = 0{,}12135 \quad \text{à } \frac{6}{10^5} \text{ près.}$$

On peut dire que U est compris entre $0{,}12135 - \frac{6}{10^5}$ et $0{,}12135 + \frac{6}{10^5}$, c'est-à-dire entre 0,12129 et 0,12141.

Comme U diffère de l'intégrale d'une quantité inférieure à $\frac{1}{10^4}$, on en conclut que la valeur de l'intégrale est

$$0{,}121 \quad \text{à } \frac{1}{1\,000} \text{ près par défaut.}$$

2° On a

$$\frac{1}{x^3+8}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^3}=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^6-\left(\frac{x}{2}\right)^9+\dots\right],$$

pour toute valeur de x inférieure à 2 en valeur absolue, et en intégrant de 0 à x,

$$\int_0^x \frac{dx}{x^3+8}=\frac{1}{8}\left(x-\frac{x^4}{2^3.4}+\frac{x^7}{2^6.7}-\frac{x^{10}}{2^9.10}+\dots\right).$$

Pour $x=1$, on obtient

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3+8}=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2^3.4}+\frac{1}{2^6.7}-\frac{1}{2^9.10}+\dots\right).$$

Le second membre est une série alternée. Si nous prenons seulement les deux premiers termes,

$$\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2^3.4}\right)=\frac{31}{256}=0{,}1210,$$

nous obtenons une valeur approchée par défaut de la somme de la série, l'erreur commise étant moindre que le premier terme négligé $\frac{1}{8.2^6.7}=\frac{1}{3\,584}$; ce terme est plus petit que 0,0003. On en conclut que la somme de la série est égale à 0,121 à $\frac{1}{1\,000}$ près par défaut.

Remarque. — On peut aussi calculer l'intégrale directement. L'intégrale indéfinie a pour valeur

$$\int \frac{dx}{x^3+8}=\frac{1}{12}\left(\mathrm{L}\,\frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+4}}+\sqrt{3}\,\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right);$$

on en déduit

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3+8} = \frac{L27 + \pi\sqrt{3}}{72}.$$

On calcule aisément

$$L27 = 3{,}2958, \qquad \pi\sqrt{3} = 5{,}4414, \qquad L27 + \pi\sqrt{3} = 8{,}7372,$$

et, en divisant par 72, on obtient la valeur déjà trouvée 0,121.

116. 1° *Calculer les valeurs numériques du trinome*

$$f(x) = x^3 - 7x + 5$$

pour des valeurs de x allant, de dixième en dixième, de 0 *à* 1.

2° *Calculer avec deux chiffres décimaux exacts, la racine de l'équation* $f(x) = 0$, *comprise entre* 0 *et* 1.

3° *Calculer avec deux chiffres décimaux exacts la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_0^{0,6} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

(*Certificat de Mathématiques générales, Paris,* 1919.)

2° La valeur de la racine est 0,78.

3° Pour calculer l'intégrale, on appliquera la méthode de Poncelet en divisant l'intervalle (0, 0,6) en six parties égales.

Les valeurs des ordonnées sont, à $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^3}$ près,

$$y_0 = 0{,}447, \qquad y_1 = 0{,}482, \qquad y_3 = 0{,}585,$$
$$y_5 = 0{,}784, \qquad y_6 = 0{,}992.$$

La valeur de l'intégrale est 0,37 à $\frac{1}{100}$ près par défaut.

117. 1° *Déterminer un polynome du troisième degré,* $P(x)$, *qui prenne les mêmes valeurs numériques que la fonction* $\cos \pi x$ *pour* $x = 0$, $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $x = 1$,

2° *Calculer une valeur approchée de l'intégrale définie*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{P(x)}\,dx$$

par la méthode des trapèzes, en partageant l'intervalle d'intégration en six parties égales.

Évaluer une limite supérieure de l'erreur commise.

(*Certificat de Mathématiques générales, Paris*, 1919.)

1° En appliquant la méthode d'interpolation de Lagrange, on obtient l'expression du polynome $P(x)$ sous la forme

$$1.\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)}{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)(-1)}+\frac{1}{2}.\frac{x\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)}$$

$$-\frac{1}{2}.\frac{x\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)}{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)}-1.\frac{x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{1\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)},$$

et, en simplifiant, on a

$$P(x)=\frac{9}{2}x^3-\frac{27}{4}x^2+\frac{x}{4}+1,$$

ou

$$P(x)=\frac{1}{4}(2x-1)(3x-4)(3x+1).$$

2° La valeur de l'intégrale est 0,38 à 0,011 près.

118. *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3-3x-1}.$$

(*École des Mines de Paris* (*), 1909.)

En appliquant la méthode de Poncelet on trouve — 0,49 à $\frac{1}{100}$ près.

(*) Places réservées aux sous-ingénieurs et contrôleurs.

119. 1° *Calculer une table des valeurs de* 10^{-t^2} *pour les valeurs de t croissant de* 0 *à* 1 *par échelons de* 0,1.

2° *De cette première table en déduire une deuxième qui donne les valeurs approchées de l'intégrale*

$$u = \int_0^t 10^{-t^2} dt$$

pour des valeurs de t croissant de 0 *à* 1 *par échelons de* 0,1.

3° *Comment et dans quelles limites la deuxième table peut-elle servir à étudier la fonction de la variable x définie par la formule*

$$y = \int_0^x e^{-x^2} dx? \qquad (e = 2,718\ldots).$$

4° *En particulier, calculer la valeur de x qui correspond à*

$$y = \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \qquad (\pi = 3,14\ldots).$$

(*Tables de logarithmes et règle à calcul à volonté.*)

(*École Polytechnique*, 1913.)

Les résultats sont indiqués dans le tableau suivant. On calcule les valeurs de u par la méthode des trapèzes ; x et y se déduisent de t et u par les formules

$$x = \frac{t}{\sqrt{\log e}}, \qquad y = \frac{u}{\sqrt{\log e}}.$$

t	10^{-t^2}	u	x	y
0	1	0	0	0
0,1	0,977	0,0989	0,152	0,150
0,2	0,912	0,1933	0,304	0,293
0,3	0,813	0,2796	0,456	0,425
0,4	0,692	0,3548	0,608	0,538
0,5	0,562	0,4175	0,760	0,634
0,6	0,437	0,4675	0,912	0,710
0,7	0,324	0,5055	1,064	0,767
0,8	0,229	0,5332	1,216	0,809
0,9	0,155	0,5524	1,368	0,838
1	0,1	0,5651	1,520	0,857

Pour calculer la valeur de x correspondant à $y = \frac{\sqrt{\pi}}{4} = 0{,}443$, on applique la méthode d'interpolation par parties proportionnelles, et l'on trouve $x = 0{,}480$.

120. *Calculer l'intégrale*

$$\int_{0,25}^{0,75} \frac{dx}{\log \frac{1}{x}}$$

au moyen de la formule de Simpson, l'intervalle d'intégration étant partagé en dix parties égales. On se servira de la règle à calcul.

(*Certificat de Mathématiques générales, Paris*, 1911.)

On a $y = \frac{1}{\log \frac{1}{x}} = -\frac{1}{\log x}$, et on forme aisément le tableau suivant :

x	$\log x$	$-\log x$	y
0.25	$\bar{1}$,398	0,602	1,66
0.30	$\bar{1}$,477	0,523	1,91
0.35	$\bar{1}$,544	0,456	2,19
0,40	$\bar{1}$,602	0,398	2,51
0,45	$\bar{1}$,653	0,347	2,88
0,50	$\bar{1}$,699	0.301	3,32
0,55	$\bar{1}$,740	0.260	3,85
0.60	$\bar{1}$,778	0,222	4,50
0,65	$\bar{1}$,813	0.187	5,35
0.70	$\bar{1}$,845	0,155	6,45
0.75	$\bar{1}$,875	0,125	8

En appliquant la formule de Simpson on obtient pour valeur de l'intégrale 1,883.

121. *Calculer une valeur approchée de l'intégrale*

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 e^{-x^2} dx$$

par la méthode de Simpson, en divisant le champ d'intégration en six parties égales. (*On donne* $\log e = 0{,}43429$.)

(*Certificat de Mathématiques générales, Toulouse*, 1906.)

On trouve 0,99527.

122. *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2 u}}$$

par la méthode de Simpson en subdivisant l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *en six parties égales.*

Calculer la même intégrale par la méthode des trapèzes en utilisant les mêmes ordonnées que dans la méthode de Simpson.

On fera les calculs à cinq décimales.

(*Certificat de Mathématiques générales, Marseille*, 1911.)

CHAPITRE VI

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

Calcul des racines commensurables.

123. Nous allons rappeler en quelques mots la méthode à suivre pour calculer les racines commensurables d'une équation algébrique

$$(1) \quad f(x) \equiv A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0,$$

dont les coefficients A_0 A_1, ... A_m sont des nombres entiers, positifs ou négatifs.

On calcule d'abord $f(1)$ et $f(-1)$; si l'un de ces nombres est nul, par exemple $f(1)=0$, l'équation admet un certain nombre de fois la racine 1; on peut supprimer cette racine en divisant le premier membre par une puissance convenable de $x-1$. On opère de même si $f(-1)$ est nul.

Il reste alors une équation qui n'admet plus les racines 1 et -1; on peut supposer que c'est l'équation (1), ce qui revient à admettre que $f(1)$ et $f(-1)$ ne sont pas nuls.

1° *Racines entières.* — On forme tous les diviseurs de A_m, en leur donnant le signe + et le signe —; on exclut tous ceux de ces diviseurs qui, mis à la place de a dans les quotients

$$(2) \qquad \frac{f(1)}{a-1}, \qquad \frac{f(-1)}{a+1},$$

ne rendent pas ces quotients entiers, et on essaie les autres de la façon suivante.

On écrit d'abord une première ligne composée des différentes puissances de x depuis x^0 jusque x^m; au-dessous on place les coefficients correspondants de $f(x)$, en ayant soin de mettre des zéros au-dessous des puissances de x qui ne figurent pas dans le polynome.

Cela posé, soit a un diviseur de A_m qui rend entiers les quotients (2); au-dessous de A_m on écrit le quotient $B_{m-1} = \frac{A_m}{a}$; on ajoute B_{m-1} au coefficient suivant A_{m-1} de $f(x)$, puis on divise la somme $B_{m-1} + A_{m-1}$ par a, et on inscrit le quotient trouvé B_{m-2} au-dessous de A_{m-1}. On fait la somme $B_{m-2} + A_{m-2}$, on divise par a, et on place le quotient B_{m-3} au-dessous de A_{m-2}, et ainsi de suite. Dès que l'un des quotients n'est pas entier, il est inutile de poursuivre le calcul, a n'est pas racine. Si tous les quotients sont entiers, il faut encore que le dernier $B_0 = \frac{B_1 + A_1}{a}$, que l'on place au-dessous de A_1, soit égal à $-A_0$.

On a ainsi la disposition suivante :

x^0	x	x^2	x^3	...	x^{m-1}	x^m
A_m	A_{m-1}	A_{m-2}	A_{m-3}	...	A_1	A_0
B_{m-1}	B_{m-2}	B_{m-3}	B_{m-4}	...	B_0	

Si ces conditions sont remplies, a est racine; de plus le polynome

$$B_{m-1} + B_{m-2}x + B_{m-3}x^2 + \dots + B_0 x^{m-1},$$

obtenu en multipliant les nombres de la troisième ligne par les puissances de x placées au-dessus, est le quotient de $f(x)$ par $a - x$.

Par suite, pour essayer une nouvelle racine, on opérera sur les nombres B_{m-1}, B_{m-2}, ... comme on a opéré sur A_m, A_{m-1}, ...

2° *Racines fractionnaires*. — Pour calculer les racines frac-

tionnaires de l'équation (1), on détermine d'abord tous les diviseurs de A_m et tous ceux de A_0. On forme ensuite toutes les fractions *irréductibles* $\frac{a}{b}$ ayant pour numérateur un diviseur de A_m et pour dénominateur un diviseur de A_0. On peut toujours prendre pour le dénominateur un nombre positif b, alors a sera positif ou négatif.

On exclut toutes celles des fractions ainsi obtenues pour lesquelles les quotients

$$\frac{f(1)}{a-b}, \qquad \frac{f(-1)}{a+b}$$

ne sont pas entiers, et on essaie les autres de la façon suivante.

I. Si $|a| > b$, on applique la même méthode que pour les racines entières, en remplaçant a par $\frac{a}{b}$; les quotients B_{m-1}, B_{m-2}, ... doivent être entiers, et le dernier $B_0 = \frac{B_1 + A_1}{\frac{a}{b}}$ doit être égal à $-A_0$. Le polynome

$$B_{m-1} + B_{m-2}x + B_{m-3}x^2 + \ldots + B_0 x^{m-1}$$

est encore le quotient de $f(x)$ par $\frac{a}{b} - x$.

II. Si $|a| < b$, et en particulier si $|a| = 1$, il est plus avantageux d'appliquer une autre méthode.

On forme le tableau suivant :

x^m	x^{m-1}	x^{m-2}	x^{m-3}	...	x	x^0
A_0	A_1	A_2	A_3.	...	A_{m-1}	A_m
	A_0	C_1	C_2	...	C_{m-2}	C_{m-1}.

Les nombres de la troisième ligne se calculent par les formules

$$C_1 = A_0\frac{a}{b} + A_1, \qquad C_2 = C_1\frac{a}{b} + A_2, \qquad C_3 = C_2\frac{a}{b} + A_3, \quad \ldots ;$$

tous ces nombres doivent être entiers pour que $\frac{a}{b}$ soit racine; de plus, il faut encore que $C_{m-1}\frac{a}{b} + A_m$ soit nul.

Si ces conditions sont remplies, $\frac{a}{b}$ est racine, et le polynome

$$A_0x^{m-1} + C_1x^{m-2} + C_2x^{m-3} + \ldots + C_{m-1}$$

est le quotient de $f(x)$ par $x - \frac{a}{b}$.

124. *Calculer les racines commensurables de l'équation*

$$f(x) \equiv x^5 + x^4 - 10x^3 + x^2 - 25x + 12 = 0.$$

Comme le coefficient de la plus haute puissance de x est égal à 1, l'équation n'a pas de racines fractionnaires. En fait de racines commensurables, elle ne peut avoir que des racines entières.

On calcule d'abord $f(1) = -20$, $f(-1) = 48$.

Les diviseurs du terme constant 12 sont ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12. Dans les quotients

$$\frac{20}{a-1}, \qquad \frac{48}{a+1},$$

nous remplaçons successivement a par tous les diviseurs de 12, et nous voyons aisément que seuls les nombres 2, 3, -3, -4 rendent entiers ces deux quotients.

Il suffira d'essayer ces quatre diviseurs.

Le tableau suivant indique la suite des calculs :

	x^0	x	x^2	x^3	x^4	x^5	
	12	-25	1	-10	1	1	
2	6	$-\frac{19}{2}$					2 n'est pas racine
3	4	-7	-2	-4	-1		3 est racine
-4	-1	2	0	$+1$			-4 est racine.

Nous essayons d'abord 2; comme le quotient

$$\frac{6-25}{2} = -\frac{19}{2}$$

n'est pas entier, 2 n'est pas racine. Puis, nous essayons 3, et nous constatons que 3 est racine ; de plus les nombres obtenus sur la quatrième ligne sont les coefficients du quotient de $f(x)$ par $3-x$. Nous essayons les autres racines sur ce nouveau polynome. Comme 4 n'est pas divisible par 3, ce polynome ne peut admettre les racines $+3$ et -3, et nous n'avons plus qu'à essayer -4, qui est racine. Comme le premier nombre de la cinquième ligne est -1, il n'y a plus de racines entières, et nous avons l'identité

$$f(x) \equiv (3-x)(-4-x)(-1+2x+x^3),$$

ou

$$f(x) \equiv (x-3)(x+4)(x^3+2x-1).$$

L'équation proposée a donc deux racines commensurables 3 et -4.

125. *Calculer les racines commensurables de l'équation*

$$f(x) \equiv 18x^5 - 33x^4 + 35x^3 - 17x^2 - 29x - 6 = 0.$$

Nous avons $f(1) = -32$, $f(-1) = -80$.

Calculons d'abord les racines entières. Les diviseurs de 6 sont ± 2, ± 3 et ± 6. Nous excluons tout de suite ± 2 et ± 6, qui ne rendent pas entiers

$$\frac{32}{a-1} \quad \text{et} \quad \frac{80}{a+1};$$

nous n'avons à essayer que $+3$ et -3.

	x^0	x	x^2	x^3	x^4	x^5	
	-6	-29	-17	35	-33	18	
3	-2	$-\frac{31}{3}$					3 n'est pas racine.
-3	2	9	$\frac{8}{3}$				-3 n'est pas racine.

L'équation n'a pas de racines entières.

Cherchons maintenant les racines fractionnaires. Les diviseurs de 18 sont ± 2, ± 3, ± 6, ± 9, ± 18. Les fractions irréductibles qui ont pour numérateur un diviseur de 6 et pour dénominateur un diviseur de 18 sont

$$\frac{\pm 1}{2},\quad \frac{\pm 1}{3},\quad \frac{\pm 1}{6},\quad \frac{\pm 1}{9},\quad \frac{\pm 1}{18},\quad \frac{\pm 2}{3},\quad \frac{\pm 2}{9},\quad \frac{\pm 3}{2}.$$

Nous excluons celles de ces fractions pour lesquelles

$$\frac{32}{a-b} \quad \text{et} \quad \frac{80}{a+b}$$

ne sont pas entiers.

Prenons par exemple $\frac{+1}{2}$, $a=1$, $b=2$, $\frac{80}{1+2}$ n'est pas entier, $\frac{1}{2}$ ne peut être racine; pour $\frac{-1}{2}$, $a=-1$, $b=2$, $\frac{32}{-1-2}$ n'est pas entier, $\frac{-1}{2}$ ne peut être racine, ..., etc.

En continuant ainsi, on voit que les seules fractions à essayer sont $\frac{\pm 1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$.

Essayons d'abord $\frac{3}{2}$ par la méthode des racines entières :

	x^0	x	x^2	x^3	x^4	x^5	
	-6	-29	-17	35	-33	18	
$\frac{3}{2}$	-4	-22	-26	6	-18		$\frac{3}{2}$ est racine.

Pour former la troisième ligne on fait les opérations suivantes :

$$-6\times\frac{2}{3}=-4, \qquad (-4-29)\frac{2}{3}=-22,$$

$$(-22-17)\frac{2}{3}=-26, \qquad (-26+35)\frac{2}{3}=6,$$

$$(6-33)\frac{2}{3}=-18,$$

et comme ce résultat est opposé au coefficient de x^5, $\frac{3}{2}$ est racine.

Le quotient de -4 par $\frac{3}{2}$ n'étant pas entier, $\frac{3}{2}$ n'est plus racine et l'on a

$$f(x) \equiv \left(\frac{3}{2} - x\right)(-4 - 22x - 26x^2 + 6x^3 - 18x^4),$$

ou

$$f(x) \equiv (2x - 3)(9x^4 - 3x^3 + 13x^2 + 11x + 2).$$

Nous allons maintenant essayer les autres fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{\pm 1}{3}$ et $\frac{1}{9}$ par la seconde méthode, en opérant sur le quotient de $f(x)$ par $2x - 3$.

	x^4	x^3	x^2	x	x^0	
	9	-3	13	11	2	
$\frac{2}{3}$		9	3	15	21	$\frac{2}{3}$ n'est pas racine.
$\frac{1}{3}$		9	0	13		$\frac{1}{3}$ n'est pas racine.
$-\frac{1}{3}$		9	-6	15	6	$-\frac{1}{3}$ est racine.
$-\frac{1}{3}$			9	-9	18	$-\frac{1}{3}$ est encore racine.
$-\frac{1}{3}$				9	-12	$-\frac{1}{3}$ n'est plus racine.

Les nombres de la troisième ligne $\left(\text{essai de } \frac{2}{3}\right)$ se calculent de la façon suivante :

$$9 \times \frac{2}{3} - 3 = 3, \qquad 3 \times \frac{2}{3} + 13 = 15, \qquad 15 \times \frac{2}{3} + 11 = 21;$$

tous ces nombres sont entiers, seulement $21 \times \frac{2}{3} + 2$ n'étant pas nul, $\frac{2}{3}$ n'est pas racine.

Pour $\frac{1}{3}$ nous avons d'abord

$$9 \times \frac{1}{3} - 3 = 0, \qquad 0 \times \frac{1}{3} + 13 = 13;$$

puis, $13 \times \frac{1}{3} + 11$ n'est pas entier, donc $\frac{1}{3}$ n'est pas racine.

Nous essayons ensuite $-\frac{1}{3}$ toujours sur le même polynome dont les coefficients sont écrits sur la deuxième ligne. Pour éviter de se tromper, on peut barrer la troisième et la quatrième ligne. Nous avons

$$9\left(-\frac{1}{3}\right) - 3 = -6, \qquad (-6)\left(-\frac{1}{3}\right) + 13 = 15,$$

$$15\left(-\frac{1}{3}\right) + 11 = 6,$$

et

$$6\left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = 0;$$

donc $-\frac{1}{3}$ est racine, et on peut écrire

$$9x^4 - 3x^3 + 13x^2 + 11x + 2 \equiv \left(x + \frac{1}{3}\right)(9x^3 - 6x^2 + 15x + 6).$$

Nous essayons encore $-\frac{1}{3}$ sur le nouveau polynome du troisième degré dont les coefficients sont écrits sur la cinquième ligne. Nous avons

$$9\left(-\frac{1}{3}\right) - 6 = -9, \quad -9\left(-\frac{1}{3}\right) + 15 = 18, \quad 18\left(-\frac{1}{3}\right) + 6 = 0,$$

$-\frac{1}{3}$ est encore racine et l'on a

$$9x^3 - 6x^2 + 15x + 6 \equiv \left(x + \frac{1}{3}\right)(9x^2 - 9x + 18);$$

en essayant encore $-\frac{1}{3}$ sur le polynome du deuxième degré,

on a $-9\left(-\frac{1}{3}\right)-9=-12, \qquad -12\left(-\frac{1}{3}\right)+18\neq 0,$

donc $-\frac{1}{3}$ n'est plus racine. On voit de même que $\frac{1}{9}$ n'est pas racine.

On a en définitive

$$9x^4-3x^3+13x^2+11x+2\equiv\left(x+\frac{1}{3}\right)^2(9x^2-9x+18),$$

et $$f(x)\equiv(2x-3)(3x+1)^2(x^2-x+2).$$

Les racines commensurables de l'équation proposée sont $\frac{3}{2}$, racine simple, et $-\frac{1}{3}$, racine double.

126. *Calculer les racines commensurables de l'équation*

$$f(x)\equiv 12x^7-71x^6+88x^5+19x^4+11x^3-88x^2-31x+60=0.$$

On a $f(1)=0$; donc $f(x)$ est divisible par $x-1$, et le quotient est

$$21x^6-59x^5+29x^4+48x^3+59x^2-29x-60.$$

Ce polynome s'annule encore pour $x=1$, et le quotient par $x-1$ est

$$\varphi(x)\equiv 12x^5-47x^4-18x^3+30x^2+89x+60,$$

et ce polynome n'est pas nul pour $x=1$.

Nous avons alors

$$f(x)\equiv\varphi(x)(x-1)^2.$$

Nous allons déterminer les racines commensurables de $\varphi(x)$.

Nous calculons

$$\varphi(1)=126, \qquad \varphi(-1)=-40.$$

Les diviseurs de 60 qui rendent entiers $\frac{126}{a-1}$ et $\frac{40}{a+1}$ sont -2, $+3$, $+4$, -5, -6.

Nous formons maintenant toutes les fractions irréductibles

$\frac{a}{b}$ dont le numérateur a est diviseur de 60, et dont le dénominateur b est diviseur de 12, et nous conservons seulement celles qui rendent entiers $\frac{126}{a-b}$ et $\frac{40}{a+b}$. Ce sont $\frac{-1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{-1}{6}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{-4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{-3}{4}$, $\frac{-5}{4}$.

Nous essaierons dans un premier tableau les racines entières et les racines fractionnaires supérieures à 1 en valeur absolue.

	x^0	x	x^2	x^3	x^4	x^5	
	60	89	30	-18	-47	12	
-2	-30	$\frac{59}{-2}$					-2 n'est pas racine.
3	20	$\frac{109}{3}$					3 n'est pas racine
4	15	26	14	-1	-12		4 est racine.
							4 n'est plus racine.
							-6 n'est pas racine.
-5	-3	$\frac{23}{-5}$					-5 n'est pas racine.
$\frac{3}{2}$	10	24	$\frac{76}{3}$				$\frac{3}{2}$ n'est pas racine.
							$-\frac{4}{3}$ n'est pas racine.
$\frac{5}{3}$	9	21	21	12			$\frac{5}{3}$ est racine.
							$\frac{5}{3}$ n'est plus racine.
							$-\frac{5}{4}$ n'est pas racine.

$$\varphi(x) \equiv (4-x)\left(\frac{5}{3}-x\right)(9+21x+21x^2+12x^3),$$

$$\varphi(x) \equiv (x-4)(3x-5)(4x^3+7x^2+7x+3).$$

Nous essayons maintenant les autres racines fraction-

naires (qui sont plus petites que 1 en valeur absolue) sur le polynome $4x^3 + 7x^2 + 7x + 3$; il suffit d'essayer celles dont le dénominateur est diviseur de 4, c'est-à-dire $\frac{-1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{-3}{4}$.

	x^3	x^2	x	x^0	
	4	7	7	3	
$-\frac{1}{2}$		4	5		$-\frac{1}{2}$ n'est pas racine
$\frac{1}{4}$		4	8	9	$\frac{1}{4}$ n'est pas racine
$\frac{-3}{4}$		4	4	4	$-\frac{3}{4}$ est racine.

$$4x^3+7x^2+7x+3 \equiv \left(x+\frac{3}{4}\right)(4x^2+4x+4) \equiv (4x+3)(x^2+x+1).$$

On a, en définitive,

$$f(x) \equiv (x-1)^2 (x-4)(3x-5)(4x+3)(x^2+x+1).$$

127. *Calculer les racines commensurables des équations*

$$x^6 + x^5 - 16x^4 - 15x^3 - 6x^2 - 16x + 96 = 0,$$
$$18x^5 - 9x^4 - 26x^3 + 32x^2 - 23x - 12 = 0,$$
$$18x^5 - 3x^4 + 5x^3 + 49x^2 - 35x + 6 = 0,$$
$$48x^6 - 92x^5 + 12x^4 - 11x^3 - 9x^2 + 81x + 27 = 0,$$
$$x^6 - 3x^5 - 14x^4 + 35x^3 + 43x^2 - 86x - 24 = 0,$$
$$x^7 + x^6 - 6x^5 - x^3 + x^2 + 8x - 12 = 0,$$
$$12x^8 - 7x^7 - 92x^6 - 32x^5 + 93x^4 + 114x^3 + 89x^2 + 9x - 18 = 0,$$
$$12x^7 - 47x^6 - 66x^5 + 230x^4 + 126x^3 - 149x^2 - 238x - 120 = 0.$$

Calcul des racines incommensurables.

128. *Déterminer à* $\frac{1}{1\,000}$ *près la racine positive de l'équation*

$$f(x) \equiv x^3 + x^2 - 27{,}48 = 0,$$

en appliquant la méthode de Newton.

(*École Polytechnique*, 1904.)

Le théorème de Descartes montre immédiatement que l'équation proposée admet une seule racine positive.

Comme on a

$$f(2) = -15,48, \qquad f(3) = 8,52,$$

la racine est comprise entre 2 et 3.

Avant d'appliquer la méthode de Newton, nous calculerons la racine directement à 0,1 près. Puisque $f(2)$ est plus grand en valeur absolue que $f(3)$, il est probable que la racine est plus voisine de 3 que de 2 ; c'est pourquoi nous substituerons successivement 2,5, 2,6, 2,7,... jusqu'à ce qu'on obtienne deux résultats de signes contraires. Pour calculer facilement les résultats de substitution, on mettra $f(x)$ sous la forme $x^2(x+1) - 27,48$, et on fera le produit de x^2 par $x+1$.

On trouve ainsi

$$f(2,7) = -0,507, \qquad f(2,8) = 2,312;$$

ceci montre que la racine est comprise entre 2,7 et 2,8.

On a

$$f'(x) = 3x^2 + 2x, \qquad f''(x) = 6x + 2;$$

comme la dérivée seconde est positive pour les valeurs positives de x, on appliquera la méthode de Newton à 2,8 qui rend positif $f(x)$.

Posons $a = 2,8$; la nouvelle valeur approchée de la racine que donne la méthode de Newton est

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Nous avons

$$f(a) = 2,312, \qquad f'(a) = 29,12,$$

et

$$\frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{2,312}{29,12} = 0,07939 \quad \text{(par défaut)},$$

puis

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} = 2,8 - 0,07939 = 2,72061 \quad \text{(par excès)}.$$

On en conclut que 2,72061 est une valeur approchée par excès de la racine.

Cherchons une limite supérieure de l'erreur commise. On sait que cette erreur est moindre que

$$\frac{h^2 M}{2f'(a)},$$

où M désigne le maximum de la valeur absolue de $f''(x)$ pour les valeurs de x comprises entre 2,7 et 2,8, et h la différence entre a et la racine.

Nous avons $M = f''(2{,}8) = 18{,}8$, et

$$\frac{M}{2f'(a)} = \frac{18{,}8}{2 \times 29{,}12} < 0{,}33.$$

Donc l'erreur est inférieure à

$$h^2 . 0{,}33.$$

Si nous remplaçons h par $\frac{1}{10}$, nous obtenons 0,0033.

Remarquons qu'on a aussi

$$|h| < 0{,}0033 + \left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| < 0{,}0033 + 0{,}0794,$$

$$|h| < 0{,}083, \qquad \text{et} \qquad h^2 < 0{,}0069.$$

Et l'on trouve ainsi une plus petite limite de l'erreur,

$$h^2 \times 0{,}33 < 0{,}0069 \times 0{,}33 < 0{,}00228.$$

On en conclut que la racine est plus grande que

$$2{,}72061 - 0{,}00228 = 2{,}71833;$$

elle est donc comprise entre 2,72061 et 2,71833. Sa valeur à 0,001 près par défaut est 2,718, ou 2,719 ou 2,720.

Pour être fixé, nous substituerons 2,719; nous trouvons

$$f(2{,}719) = 0{,}014421959,$$

résultat positif; donc la racine est plus petite que 2,719. Elle est comprise entre 2,718 et 2,719; sa valeur à 0,001 par défaut est 2,718.

REMARQUE. — A titre d'exercice, nous allons appliquer une seconde fois la méthode de Newton à la valeur $2{,}719 = a$.

$$\frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{0{,}014421959}{27{,}616883} = 0{,}0005222 \quad \text{(par défaut)}.$$

La nouvelle valeur approchée est

$$2{,}719 - 0{,}0005222 = 2{,}7184778 \qquad \text{(par excès)}.$$

L'erreur commise est moindre que

$$\frac{h^2 M}{2f'(a)} = \frac{h^2 . 18{,}314}{2 \times 27{,}616883} < h^2 . 0{,}4.$$

Si nous remplaçons h par 0,001, l'erreur est moindre que 0,0000004, et la racine est supérieure à

$$2{,}7184778 - 0{,}0000004 \qquad \text{ou} \qquad 2{,}7184774.$$

Par suite, 2,718477 est une valeur approchée de la racine à $\frac{1}{10^6}$ près par défaut.

N. B. — On peut vérifier les premières décimales en appliquant la méthode trigonométrique (chapitre II), et ceci peut se faire pour toute équation du troisième degré.

129. *Soit* $f(x) \equiv x^3 + 3x^2 - 105x + 200$.

1° *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *a trois racines réelles.*

2° *Calculer les valeurs de* $f(x)$ *pour les valeurs croissantes de* x *à partir de* $x = 7$, *de dixième en dixième, jusqu'à ce qu'on trouve un résultat positif.*

3° *Calculer à* 0,001 *près la racine comprise entre* 7 *et* 8.

(*Certificat de Mathématiques générales*, *Paris*, 1913.)

1° On vérifie aisément que l'équation $f(x) = 0$ admet trois racines réelles en appliquant le théorème de Rolle, car l'équation dérivée a pour racines -7 et $+5$. L'équation $f(x) = 0$ admet une racine négative plus petite que -7 et deux racines positives séparées par le nombre $+5$.

2° Pour calculer le résultat de substitution d'un nombre a à x dans $f(x)$, on calcule successivement

$$a+3, \qquad a(a+3), \qquad a(a+3)-105, \qquad [a(a+3)-105]a,$$

et il n'y a plus qu'à ajouter 200 au dernier nombre.

Ainsi, pour $a=7$, nous avons

$$10, \qquad 70, \qquad -35, \qquad -245,$$

et $f(7)=-45$.

Pour $a=7{,}1$,

$$10{,}1, \qquad 71{,}71, \qquad -33{,}29, \qquad -236{,}359,$$

et $f(7{,}1)=-36{,}359$.

Nous trouvons de même

$$f(7{,}2)=-27{,}232, \qquad f(7{,}3)=-17{,}613,$$
$$f(7{,}4)=-\ 7{,}496, \qquad f(7{,}5)=+3{,}125,$$

et ceci montre que la racine envisagée est comprise entre 7,4 et 7,5.

3° Pour calculer cette racine à 0,001 près, nous appliquerons la méthode de Newton et celle des parties proportionnelles. Comme la dérivée seconde $f''(x)=6(x+1)$ est positive quand x varie entre 7,4 et 7,5, et que $f(7{,}4)$ est négatif et $f(7{,}5)$ positif, nous appliquerons la méthode de Newton à 7,5 et celle des parties proportionnelles à 7,4.

La méthode de Newton nous donne

$$7{,}5-\frac{f(0{,}5)}{f'(0{,}5)}=7{,}5-\frac{3{,}125}{108{,}75}=7{,}5-0{,}02873\ldots$$

ou 7,47127, valeur approchée par excès, car nous avons calculé par défaut le quotient $\frac{3{,}125}{108{,}75}$.

D'autre part, la méthode des parties proportionnelles donne

$$\frac{3{,}125\times 7{,}4+7{,}496\times 7{,}5}{3{,}125+7{,}496}=\frac{79{,}345}{10{,}621}=7{,}4705\ldots$$

par défaut.

La racine est comprise entre 7,4705 et 7,47127.

Pour être sûr du troisième chiffre décimal, nous substituons 7,471 ; en posant $a = 7,471$, nous avons successivement

$$a(a+3) = 78,228841,$$
$$a(a+3) - 105 = -26,771159,$$
$$[a(a+3) - 105]a = -200,007328889$$

et

$$f(a) = -0,007328889;$$

donc la racine est comprise entre 7,471 et 7,472 ; sa valeur à $\frac{1}{1\,000}$ près par défaut est 7,471.

130. *Calculer avec sept décimales exactes la plus petite racine positive de l'équation*

$$f(x) \equiv x^3 - 7x + 2 = 0,$$

On a

$$f(0,2) = 0,608, \qquad f(0,3) = -0,073;$$

la racine est comprise entre 0,2 et 0,3. Comme dans cet intervalle, la dérivée seconde $f''(x) = 6x$ est positive, nous appliquons la méthode de Newton à 0,2.

Nous avons

$$-\frac{f(0,2)}{f'(0,2)} = \frac{0,608}{6,88} = 0,08837\ldots \qquad \text{par défaut,}$$

d'où la valeur approchée de la racine par défaut

$$0,28837.$$

La méthode des parties proportionnelles nous donne une valeur par excès,

$$\frac{0,197}{0,681} = 0,2893.$$

La racine est comprise entre 0,28837 et 0,2893 ; pour être sûr du troisième chiffre décimal, nous calculons

$$f(0{,}289) = +0{,}001137569,$$

ce qui montre que la racine est supérieure à 0,289 ; elle est comprise entre 0,289 et 0,2893.

Appliquons encore la méthode de Newton à 0,289. Nous avons

$$f'(0{,}289) = -6{,}749437,$$

et

$$-\frac{f(0{,}289)}{f'(0{,}289)} = 0{,}000168542\ldots \qquad \text{par défaut.}$$

On a donc la nouvelle valeur approchée par défaut

$$0{,}289168542.$$

Au lieu d'appliquer ici la méthode des parties proportionnelles, nous chercherons une limite supérieure de l'erreur commise, en appliquant la formule

$$\varepsilon < h^2 \frac{M}{2f'(a)}.$$

Nous avons

$$M = 6 \times 0{,}2893 < 1{,}8, \qquad 2f'(a) > 12,$$

$$h < \frac{3}{10^4}, \qquad h^2 < \frac{9}{10^8};$$

par suite,

$$\varepsilon < \frac{9}{10^8} \cdot \frac{1{,}8}{12} < \frac{1{,}35}{10^8}.$$

Donc la racine est comprise entre 0,289168542 et

$$0{,}289168542 + 0{,}0000000135, \qquad \text{ou} \qquad 0{,}2891685555;$$

donc,

$$0{,}2891685$$

est la valeur approchée de la racine à $\frac{1}{10^7}$ près par défaut.

131. *Calculer avec six décimales exactes la racine réelle de l'équation*

$$2x^5 + 10x - 1 = 0.$$

(*École des Mines de Paris*, 1910.)

La racine est comprise entre 0 et 0,1. On aura les sept premières décimales en appliquant une seule fois la méthode de Newton à 0,1. On trouve

$$0,099998.$$

132. *On donne l'équation*

$$f(x) \equiv x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = 0.$$

1° *Constater qu'une de ses racines x est comprise entre $+1$ et $+1,5$.*

2° *La méthode d'approximation de Newton est-elle applicable à la recherche de cette racine?*

3° *Former l'équation qui donne $y = 1,5 - x$.*

4° *Calculer la valeur y_1 qu'elle donne pour y quand on néglige les termes de degré supérieur au premier dans cette équation en y.*

5° *Évaluer les termes négligés dans ce calcul et déduire de cette évaluation une nouvelle valeur y_2 plus approchée de y que y_1, en tenant compte des termes de degré supérieur au premier.*

(*École Polytechnique*, 1914.)

1° On a $f(1) = -4$, $f(1,5) = +0,0625$; par suite, l'équation admet un nombre impair de racines réelles comprises entre 1 et 1,5. Mais, comme le polynome $f(x)$ admet deux variations, l'équation ne peut avoir plus de deux racines positives. Elle admet donc une seule racine réelle comprise entre 1 et 1,5.

2° On a

$$f'(x) \equiv 4(x^3 + 3x^2 - 3x - 1),$$
$$f''(x) \equiv 12(x^2 + 2x - 1).$$

Comme $f''(x)$ est positive pour toute valeur de x comprise entre 1 et 1,5, on peut appliquer la méthode de Newton à la limite 1,5, qui rend $f(x)$ de même signe que $f''(x)$.

On obtient une valeur plus approchée que 1,5 et dans le même sens, c'est-à-dire par excès,

$$1{,}5 - \frac{f(1.5)}{f'(1{,}5)} = 1{,}5 - \frac{0{,}0625}{18{,}5}.$$

3° L'équation transformée est $f(1{,}5 - y) = 0$, ou

$$f(1{,}5) - yf'(1{,}5) + \frac{y^2}{2!}f''(1{,}5) - \frac{y^3}{3!}f'''(1{,}5) + \frac{y^4}{4!}f^{\text{IV}}(1{,}5) = 0.$$

Nous avons déjà calculé $f(1{,}5)$ et $f'(1{,}5)$; nous obtenons facilement

$$f''(1{,}5) = 51, \qquad f'''(1{,}5) = 60, \qquad f^{\text{IV}}(1{,}5) = 24,$$

et par suite l'équation en y devient

$$(1) \qquad 0{,}0625 - 18{,}5y + 25{,}5y^2 - 10y^3 + y^4 = 0.$$

4° En négligeant les termes de degré supérieur au premier, il nous reste l'équation

$$0{,}0625 - 18{,}5y = 0,$$

qui admet la racine

$$y_1 = \frac{0{,}0625}{18{,}5} = 0{,}00337837\ldots.$$

Cette valeur est précisément égale à la correction que donne la méthode de Newton.

5° De l'équation (1) on tire

$$y = \frac{0.0625 + y^2(y^2 - 10y + 25.5)}{18{,}5}.$$

Remplaçons dans le second membre y par la valeur 0,003, qui diffère de y_1 d'une quantité inférieure à 0,0004, nous obtenons la nouvelle valeur y_2 de y :

$$y_2 = \frac{0{,}0625 + 0{,}00022923081}{18{,}5} = 0{,}00339076\ldots,$$

Pour démontrer que y_2 est plus approché que y_1 et pour déterminer l'approximation, on peut remarquer d'abord que la racine de l'équation (1) qui est voisine de y_1 est comprise entre 0,003 et 0,004. De plus, en posant

$$\varphi(y) \equiv y^2(y^2 - 10y + 25,5),$$

on voit aisément que $\varphi(y)$ croît quand y croît de 0,003 à 0,004; par suite, si nous désignons par y_0 la valeur exacte de la racine, nous avons

$$\varphi(0,003) < \varphi(y_0) < \varphi(0,004),$$

et comme on a

$$y_0 = \frac{0,0625 + \varphi(y_0)}{18,5},$$

on en conclut

$$\frac{0,0625 + \varphi(0,003)}{18,5} < y_0 < \frac{0.0625 + \varphi(0,004)}{18,5},$$

ou

$$0,00339076 < y_0 < 0,003400398.$$

Ceci montre que y_2 est plus approché que y_1 et que l'approximation est moindre que $\frac{1}{10^5}$.

On en conclut que la racine de l'équation $f(x) = 0$, qui est égale à $1,5 - y_0$, est comprise entre

$$1,496599602 \qquad \text{et} \qquad 1,49660924.$$

On peut vérifier que $f(1,49660)$ est négatif, et l'on voit ainsi que la valeur de la racine à $\frac{1}{10^5}$ près par défaut est 1,49660.

133. *Démontrer que l'équation*

$$f(x) \equiv x^4 - 2x^3 + x - 1 = 0$$

a deux racines réelles et les calculer à $\frac{1}{100}$ *près.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Lyon*, 1910.)

L'équation dérivée a pour racines $\frac{1}{2}$ et $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$; en ajoutant 0 à la suite de Rolle, on obtient

$$-\infty, \quad \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \quad 0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad +\infty.$$

Les résultats de substitution de $\pm\infty$ étant positifs, et ceux de 0 et $\frac{1}{2}$ négatifs, on voit immédiatement (sans substituer $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$) que l'équation admet une racine négative et une racine positive; la première est comprise entre -1 et 0, la seconde entre 1 et 2.

En appliquant les méthodes habituelles, on obtient pour valeurs de ces racines à $\frac{1}{100}$ près par défaut, $-0,87$ et $+1,86$.

Mais, en faisant le calcul, on constate que si l'on substitue dans $f(x)$ deux nombres, dont la somme est égale à 1, on obtient les mêmes résultats de substitution.

Ainsi, on a

$$f(-0,8) = -0,3664, \qquad f(1,8) = -0,3664,$$
$$f(-0,9) = 0,2141, \qquad f(1,9) = 0,2141, \ldots.$$

On est conduit à penser que l'équation est identique à sa transformée en $1-x$, et on le vérifie aisément : on remplace x par $1-x$ et l'équation ne change pas.

On en conclut que les quatre racines peuvent se partager en deux groupes de deux racines, la somme des racines de chaque groupe étant égale à 1, et par suite ces deux racines sont racines d'un trinome tel que $x^2 - x + \alpha$. Le premier membre de l'équation donnée peut alors être mis sous la forme

$$(x^2 - x + \alpha)(x^2 - x + \beta)$$

ou

$$(x^2 - x)^2 + \lambda(x^2 - x) + \mu.$$

On a en effet

$$f(x) \equiv (x^2 - x)^2 - (x^2 - x) - 1 = 0.$$

On peut alors résoudre cette équation par rapport à $x^2 - x$, et l'on a

$$x^2 - x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

En prenant le signe — devant $\sqrt{5}$ l'équation n'a pas de racines réelles; il suffit de résoudre l'équation

$$x^2 - x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

et l'on trouve

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{2} = \frac{1 \pm 2{,}7335\ldots}{2},$$

ce qui donne les racines $-0{,}8667$ et $1{,}8667$.

134. *Résoudre l'équation*

$$9x^4 - 14x^2 + 8x - 1 = 0.$$

(*Agrégation*, 1883.)

L'équation a ses quatre racines réelles séparées par les racines de la dérivée qui sont -1, $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

Les racines de l'équation sont, à $\frac{1}{10^6}$ par défaut,

$$\begin{array}{ll} -1{,}484794, & 0{,}181317, \\ 0{,}541986, & 0{,}761491. \end{array}$$

On peut remarquer que l'équation se met sous la forme

$$(3x^2 - 4x + 1)^2 - 2x^2(3x - 2)^2 = 0;$$

elle se décompose en deux équations du deuxième degré, dont les racines sont

$$\frac{+\sqrt{2} \pm \sqrt{5 - 3\sqrt{2}}}{3} \quad \text{et} \quad \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{5 + 3\sqrt{2}}}{3}.$$

135. *Calculer les racines réelles et imaginaires de l'équation*

$$x^5 - 4x - 2 = 0.$$

Le théorème de Descartes montre immédiatement que l'équation admet une racine positive et deux racines négatives; on peut les calculer par les procédés habituels, et on trouve, à $\frac{1}{1\,000}$ près par défaut,

$$+1,518, \qquad -0,509, \qquad -1,244.$$

On peut aussi calculer la racine positive par de simples substitutions en écrivant l'équation sous la forme

$$5 \log x - \log(4x + 2) = 0;$$

et pour calculer les racines négatives, on pose $x = -y$, et on écrit

$$5 \log y - \log(4y - 2) = 0.$$

Cherchons maintenant les racines imaginaires. Nous remplaçons dans l'équation x par $\rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, et nous obtenons

$$\rho^5(\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi) - 4\rho(\cos\varphi + i \sin\varphi) - 2 = 0.$$

Pour que cette équation soit vérifiée, il faut qu'on ait

$$\rho^5 \cos 5\varphi - 4\rho \cos\varphi - 2 = 0,$$
$$\rho^5 \sin 5\varphi - 4\rho \sin\varphi = 0.$$

De la deuxième, nous tirons $\rho^4 = \frac{4 \sin\varphi}{\sin 5\varphi}$, et en portant cette valeur dans la première, écrite sous la forme

$$\rho[\rho^4 \cos 5\varphi - 4 \cos\varphi] - 2 = 0,$$

nous obtenons

$$(1) \qquad \rho = -\frac{\sin 5\varphi}{2 \sin 4\varphi}.$$

Écrivons que la quatrième puissance de cette valeur de ρ

est égale à la valeur de ρ^4, $\frac{4 \sin \varphi}{\sin 5\varphi}$, trouvée plus haut, nous avons l'équation

$$(2) \qquad 64 \sin \varphi \sin^4 4\varphi - \sin^5 5\varphi = 0,$$

qui détermine la valeur de φ. A toute valeur de φ correspond une valeur de ρ donnée par l'équation (1).

On voit aisément que l'équation (2) admet une racine comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{2\pi}{5}$, c'est-à-dire entre 100^g et 80^g. On la calcule en mettant l'équation sous la forme

$$\log 64 + \log \sin \varphi + 4 \log |\sin 4\varphi| - 5 \log \sin 5\varphi = 0,$$

et en faisant des substitutions, on obtient pour valeur de la racine, à une seconde centésimale près, $94^g,8424$.

On en déduit

$$\rho \cos \varphi = 0,11679, \qquad \rho \sin \varphi = 1,4384,$$

et par suite les racines imaginaires sont

$$0,11679 \pm 1,4384 i.$$

136. *Calculer les racines imaginaires de l'équation*

$$x^4 - x + 1 = 0,$$

en appliquant la même méthode que dans l'exercice précédent, et comparer les résultats à ceux de l'exercice 41.

137. *Calculer avec quatre décimales la racine positive de l'équation*

$$x^3 + 3x - 1 = 0.$$

(*Certificat de Mathématiques générales, Caen*, 1908.)

La racine est comprise entre 0,3221 et 0,3222.

138. *Calculer à* $\frac{1}{10^4}$ *près par défaut la racine positive de l'équation*

$$x^3 - x^2 - 7x - 1 = 0.$$

On trouve 3,2491.

139. *Dans une demi-sphère pleine et homogène, de rayon pris pour unité, on creuse une cavité demi-sphérique de rayon* x. *Déterminer* x, *avec trois décimales exactes, de façon que le centre de gravité du solide restant coïncide avec le pôle de la cavité.*

On trouve que x est racine de l'équation

$$x^3 + x^2 + x - 0{,}6 = 0.$$

La racine est comprise entre 0,389 et 0,3895.

140. *Calculer à* $\frac{1}{1\,000}$ *près la plus petite racine positive de l'équation*

$$2x^3 - 3x^2 + 0{,}7 = 0.$$

(*École des Ponts et Chaussées*, 1908.)

On trouve 0,636 à $\frac{1}{1\,000}$ près par défaut.

141. *Calculer les racines réelles de l'équation*

$$3x^4 + 22x^3 + 63x^2 + 34x - 24 = 0,$$

avec une erreur inférieure ou égale à 10^4

(*Certificat de Mathématiques générales, Grenoble*, 1913.)

On montrera d'abord que l'équation a une racine commensurable fractionnaire, et après avoir débarrassé l'équation de cette racine, on obtiendra une équation du troisième degré qui a une seule racine réelle.

142. *Calculer à* $\frac{1}{100}$ *près la racine positive de l'équation*

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 12x - 18 = 0.$$

(*Certificat de Mathématiques générales, Grenoble*, 1913.)

143. *Calculer, par la méthode trigonométrique ou la méthode de Newton, avec trois décimales, les racines de l'équation*

$$x^3 + 3x^2 - 16x - 10 = 0.$$

(*Certificat de Mathématiques générales, Alger*, 1914.)

144. *Montrer que l'équation*

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 5 = 0$$

a une seule racine réelle et calculer cette racine avec deux décimales.

(*Certificat de Mathématiques générales, Caen*, 1911.)

145. *Dans un disque circulaire de centre* O *et de rayon un, on découpe un secteur* AOB *dont l'angle au centre, exprimé en degrés, minutes et secondes, est désigné par* α. *En juxtaposant les bords* OA *et* OB, *on obtient un entonnoir ayant la forme d'un cône de révolution.*

Calculer les deux valeurs de α *pour lesquelles le volume du cône obtenu est la moitié du volume d'une sphère ayant un diamètre égal au rayon du disque.*

On pourra prendre comme inconnue auxiliaire le carré du rayon de base du cône et montrer que ce nombre vérifie l'équation

$$x^3 - x^2 + \frac{1}{16} = 0.$$

(*Certificat de Mathématiques générales, Paris*, 1917.)

146. *L'équation*

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-1=0$$

a trois racines réelles séparées par les nombres -1, 0, $+1$; *calculer la plus grande à* 0,001 *près.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Marseille*, 1910.)

CHAPITRE VII

ÉQUATIONS TRANSCENDANTES

---

147. *On donne un demi-cercle de diamètre* AB *et de centre* O, *et on demande de mener une corde* AM *qui divise l'aire du demi-cercle en deux parties équivalentes.*

(J. BERTRAND.)

Si l'on désigne par φ l'angle BAM, on sera conduit à résoudre l'équation

$$\sin 2\varphi + 2\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Posons $x = \frac{\pi}{2} - 2\varphi$, on aura l'équation plus simple

$$(1) \qquad f(x) = x - \cos x = 0.$$

On peut remarquer que l'angle x est l'angle que fait le rayon OM avec le rayon perpendiculaire au diamètre AB.

Nous allons résoudre l'équation (1).

Comme la dérivée $f'(x) = 1 + \sin x$ est toujours positive, la fonction $f(x)$ est croissante ; on a

$$f(0) = -1, \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

par suite, l'équation admet une seule racine comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Toute valeur rendant $f(x)$ négatif sera plus petite que la racine, et toute valeur le rendant positif sera plus grande que la racine.

Substituons d'abord des angles dont nous connaissons le cosinus, par exemple $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

Nous avons

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}52\ldots - 0{,}86\ldots < 0,$$

$\frac{\pi}{6}$ est plus petit que la racine;

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}78\ldots - 0{,}70\ldots > 0,$$

$\frac{\pi}{4}$ est supérieur à la racine. Donc la racine est comprise entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$, et comme $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ est supérieur en valeur absolue à $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, il est probable que la racine est plus voisine de $\frac{\pi}{4} = 0{,}78\ldots$ que de $\frac{\pi}{6} = 0{,}52\ldots$.

Calculons d'abord cette racine à 0,1 près; pour cela nous substituons 0,7. Nous avons

$$f(0{,}7) = 0{,}7 - \cos 0{,}7.$$

Pour calculer cos 0,7, nous exprimons en grades l'angle 0,7, nous cherchons le logarithme du cosinus, puis le cosinus lui-même.

Pour avoir 0,7 en grades, il faut faire le produit $0{,}7 \times \frac{200}{\pi}$; ce calcul se fait aisément au moyen de la table des multiples de $\frac{200}{\pi}$ qui se trouve dans la plupart des tables de logarithmes (*). On a, à une demi-unité du quatrième ordre décimal,

$$0{,}7 \times \frac{200}{\pi} \doteq 44^g{,}5634.$$

(*) On trouvera ces multiples à la fin du volume. On peut d'ailleurs les calculer aisément en utilisant la valeur de $\frac{1}{\pi}$,

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}318309886,$$

qui a été obtenue au n° 11 du tome I.

Calcul de log cos 0,7

		$\Delta = 6$
44,57	$\bar{1}$,88353	
6	3,6	
6	0,36	

log cos 0,7 $= \bar{1}$,88357

Calcul de cos 0,7.

		$\Delta = 5$
$\bar{1}$,88357		
5	7648	
2	4	

cos 0,7 = 0,76484

$$f(0,7) = 0,7 - 0,76484 = -0,06484.$$

Ceci montre que 0,7 est plus petit que la racine.

Substituons 0,8; on a

$$0,8 \times \frac{200}{\pi} = 50^{g},9296.$$

		$\Delta = 7$
50,93	$\bar{1}$,84305	
04	0,28	

log cos 0,8 $= \bar{1}$,84305

cos 0,8 = 0,69670

$$f(0,8) = 0,8 - 0,69670 = +0,10330.$$

La racine est comprise entre 0,7 et 0,8, et semble plus rapprochée de 0,7 que de 0,8.

Substituons 0,73.

$$0,73 \times \frac{200}{\pi} = \left\{ \begin{array}{l} 44,56338 \\ 1,909859 \\ \hline 46,4732 \end{array} \right.$$

		$\Delta = 6$
46,48	$\bar{1}$,87222	
6	3,6	
8	0,48	

log cos 0,73 $= \bar{1}$,87226

		$\Delta = 6$
$\bar{1}$,87226		
1	7451	
5	8	

cos 0,73 = 0,74518

$$f(0,73) = 0,73 - 0,74518 = -0,01518.$$

Substituons 0,74.

$$0{,}74 \times \frac{200}{\pi} = \left\{ \begin{array}{r} 44{,}56338 \\ 2{,}546479 \\ \hline 47{,}1099 \end{array} \right.$$

$$\Delta = 6$$

$$\log \cos 0{,}74 = \bar{1}{,}86833$$

$$\begin{array}{cc} \underline{29} & 7384 \\ 4 & 7 \end{array}$$

$$\cos 0{,}74 = 0{,}73847,$$

$$f(0{,}74) = 0{,}74 - 0{,}73847 = +\,0{,}00153.$$

La racine est comprise entre 0,73 et 0,74.

Nous allons maintenant appliquer les méthodes d'approximation.

Comme la dérivée seconde $f''(x) = \cos x$ est positive dans l'intervalle, nous appliquerons la méthode de Newton à 0,74 et la méthode des parties proportionnelles à 0,73.

On a

$$f'(x) = 1 + \sin x, \qquad f'(0{,}74) = 1 + \sin 0{,}74,$$

$$\log \sin 0{,}74 = \log \sin 47^{g}{,}11 = \bar{1}{,}82885,$$

$$\sin 0{,}74 = 0{,}67430,$$

$$f'(0{,}4) = 1{,}67430,$$

$$\frac{f(0{,}74)}{f'(0{,}74)} = \frac{0{,}00153}{1{,}6743} = 0{,}000913\ldots \qquad \text{par défaut,}$$

d'où la racine par excès

$$0{,}74 - \frac{f(0{,}74)}{f'(0{,}74)} = 0{,}739087\ldots$$

La méthode des parties proportionnelles donne

$$\frac{f(0{,}74) \times 0{,}73 - f(0{,}73) \times 0{,}74}{f(0{,}74) - f(0{,}73)} = \frac{0{,}0011169 + 0{,}0112332}{0{,}00153 + 0{,}01518}$$

$$= \frac{0{,}0123501}{0{,}01671} = 0{,}739084\ldots,$$

par défaut.

On en conclut que la racine est égale à

$$0,73908,$$

avec cinq décimales exactes.

Sa valeur en grades est

$$\begin{array}{l} 44,56338 \\ 1,909859 \\ 0,5729578 \\ 0,005092958 \\ \hline 47,0513 \end{array}$$

Comme vérification, calculons le cosinus de cet angle

	$\Delta = 6$			$\Delta = 6$
47,06	$\bar{1},86864$		$\bar{1},86869$	
8	4,8		4	7390
7	0,42		5	8
log cos	$= \bar{1},86869$		cos	$= 0,73908$

On a donc

$$f(0,73908) = 0,$$

à l'approximation des tables à cinq décimales.

L'angle φ que fait la corde AM avec le diamètre AB est alors en grades

$$\varphi = 50 - \frac{47,0513}{2} = 26^g,4744.$$

Autre méthode. — On peut chercher directement la valeur en grades de la racine de l'équation

$$x - \cos x = 0.$$

Soit u cette valeur, on a $x = \frac{\pi u}{200}$, et l'équation devient

$$\frac{\pi u}{200} - \cos u = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\pi u}{200} = \cos u,$$

ou encore $$\log \frac{\pi}{200} + \log u = \log \cos u,$$
ou enfin
$$\varphi(u) = \log \frac{\pi}{200} + \log u - \log \cos u = 0.$$

On calcule d'abord
$$\log \frac{\pi}{200} = \bar{2},19612,$$

et le calcul de $\varphi(u)$ pour une valeur de u se fait très simplement.

Nous avons vu que x est compris entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$, donc u sera compris entre 33 et 50. Substituons successivement 45, 46, 47, ...

$$\begin{array}{rl} \log \frac{\pi}{200} &= \bar{2},19612 \\ \log 45 &= 1,65321 \\ -\log \cos 45 &= 0,11895 \\ \hline \varphi(45) &= \bar{1},96828 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log \frac{\pi}{200} &= \bar{2},19612 \\ \log 46 &= 1,66276 \\ -\log \cos 46 &= 0,12487 \\ \hline \varphi(46) &= \bar{1},98375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \bar{2},19612 \\ 1,67210 \\ 0,13098 \\ \hline \varphi(47) = \bar{1},99920 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bar{2},19612 \\ 1,68124 \\ 0,13729 \\ \hline \varphi(48) = 0,01465 \end{array}$$

La racine est comprise entre 47 et 48.

$$\begin{array}{r} \bar{2},19612 \\ 1,67302 \\ 0,13161 \\ \hline \varphi(47,1) = 0,00075 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bar{2},19612 \\ 1,67256 \\ 0,13130 \\ \hline \varphi(47,05) = \bar{1},99998 \end{array}$$

et en essayant 47,051, on a

$$\begin{array}{r} \bar{2},19612 \\ 1,67257 \\ 0,13131 \\ \hline \varphi(47,051) = 0,00000, \end{array}$$

et ceci donne pour valeur de la racine 47,0510.

148. *Mener d'un point* A *d'une circonférence deux cordes* AM *et* AN, *telles qu'elles divisent l'aire du cercle en trois parties égales.* (J. BERTRAND.)

Soient O le centre du cercle et B le point diamétralement opposé au point A ; si l'on désigne par x l'angle BOM, on obtient l'équation

$$f(x) = x + \sin x - \frac{\pi}{3} = 0,$$

qui admet une seule racine comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, qu'on peut calculer comme dans l'exercice précédent.

On aura d'abord

$$f(0,53) = -0,01167, \qquad f(0,54) = +0,00694,$$

ce qui montre que la racine est comprise entre 0,53 et 0,54.

La méthode des parties proportionnelles donne

$$\frac{0,00998}{0,01861} = 0,536271\ldots \qquad \text{par excès,}$$

et la méthode de Newton

$$0,53 - \frac{f(0,53)}{f'(0,53)} = 0,53 + \frac{0,01167}{1,86282}$$
$$= 0,536264\ldots \qquad \text{par défaut.}$$

Substituons dans $f(x)$ successivement les deux nombres 0,53626 et 0,53627. Les valeurs en grades correspondantes sont $34^g,1394$ et $34^g,1400$.

Nous avons

$$\sin 34^g,1394 = 0,51091, \qquad \sin 34^g,14 = 0,51093,$$

et nous en tirons

$$f(0,53626) = -0,00003,$$
$$f(0,53627) = 0.$$

Par suite, la racine est

$$0,53627 \qquad \text{à } \frac{1}{10^5} \text{ près.}$$

On peut aussi désigner par u la valeur de la racine en grades ; on est conduit à résoudre l'équation

$$\log \frac{\pi}{600} + \log(200 - 3u) - \log \sin u = 0,$$

et la valeur de u s'obtient facilement par de simples substitutions.

Pour $u = 34,14$, on trouve un résultat nul.

149. *x étant exprimé en radians, dire combien l'équation*

$$\cos x - x \cos x - x \sin x = 0$$

a de racines.

Calculer à 0,01 *près la racine la plus voisine de zéro.*

(*Certificat de Mathématiques générales*, *Lyon*, 1918.)

L'équation peut s'écrire

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{x} - 1 ;$$

si l'on construit les deux courbes

$$y = \operatorname{tg} x, \qquad y = \frac{1}{x} - 1,$$

on voit qu'elles ont une infinité de points communs ; par suite l'équation a une infinité de racines. Il y en a une comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0, et une comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. La positive est la plus voisine de zéro, car elle est plus petite que $\frac{\pi}{4}$, tandis que la négative est plus grande que $\frac{\pi}{4}$ en valeur absolue.

On verra aisément que la racine la plus voisine de zéro est comprise entre 0,59 et 0,60.

On peut aussi écrire l'équation de la façon suivante :

$$\frac{1}{x} = \operatorname{tg} x + 1, \qquad \frac{1}{x} = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$

ou

$$\frac{1}{x} = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos x \cos\frac{\pi}{4}},$$

ou, en désignant par u la valeur de x en grades,

$$\frac{200}{\pi u} = \frac{\sin(u + 50)}{\cos u \cos 50},$$

ou enfin

$$\log \sin(u + 50) + \log u - \log \cos u - \log \frac{200 \cos 50}{\pi} = 0,$$

et par de simples substitutions, on voit facilement que la racine est comprise entre $37^g,93$ et $37^g,94$.

150. *Soit $\varphi(x)$ une fonction de la variable réelle x, continue pour toute valeur de cette variable.*

On suppose que la valeur absolue de la dérivée $\varphi'(x)$ est, pour toute valeur de x, moindre qu'un nombre positif k inférieur à l'unité.

1° *Montrer que l'équation*

$$x - \varphi(x) = 0$$

admet une seule racine réelle a.

2° *On forme la suite*

$$x_1 = \varphi(x_0), \qquad x_2 = \varphi(x_1), \quad \ldots \quad x_n = \varphi(x_{n-1}),$$

où x_0 est une quantité réelle arbitrairement choisie.

Montrer que x_n tend vers la racine a quand n augmente indéfiniment.

(*Concours général*, 1897.)

D'après l'hypothèse $|\varphi'(x)| < k$, la dérivée de la fonction $x - \varphi(x)$ est toujours positive; par suite, cette fonction est croissante, elle ne peut avoir plus d'une racine.

D'autre part, en appliquant le théorème des accroissements finis, on a

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(\theta x), \qquad 0 < \theta < 1,$$

ou

$$f(x) = x - \varphi(x) = x[1 - \varphi'(\theta x)] - \varphi(0).$$

Or $1 - \varphi'(\theta x)$ est supérieur à $1 - k$; donc, pour des valeurs de x suffisamment grandes en valeur absolue, $f(x)$ a le signe de x. Pour $x = +\infty$, $f(x) > 0$, pour $x = -\infty$, $f(x) < 0$.

On en conclut que $f(x)$ admet une racine et une seule.

2° Soit a cette racine; nous avons $a = \varphi(a)$, et

$$x_n - a = \varphi(x_{n-1}) - \varphi(a)$$

ou

$$(1) \qquad x_n - a = (x_{n-1} - a)\varphi'(\lambda),$$

λ étant compris entre x_{n-1} et a. On en déduit

$$|x_n - a| < |x_{n-1} - a|.k,$$

et de même

$$|x_{n-1} - a| < |x_{n-2} - a|.k,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$|x_1 - a| < |x_0 - a|.k.$$

Multiplions membre à membre toutes ces inégalités, nous avons

$$|x_n - a| < |x_0 - a|.k^n.$$

Soit ε un nombre positif arbitraire; comme k est plus petit que 1, il existe un nombre positif p tel que pour toute valeur de n supérieure à p on ait

$$k^n < \frac{\varepsilon}{|x_0 - a|}.$$

On aura donc

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

ce qui montre que x_n a pour limite a pour n infini.

On peut ainsi calculer la racine a avec autant d'approximation que l'on veut.

C'est ce qu'on appelle la *méthode des approximations successives*.

Remarque. — Si $\varphi'(x)$ est positif pour les valeurs de x qui diffèrent de a d'une quantité inférieure à $|x_0 - a|$, $x_n - a$ et $x_{n-1} - a$ sont de même signe, d'après l'égalité (1); par suite $x_n - a$ a le signe de $x_0 - a$. Si $x_0 < a$, x_n augmente en même temps que n en se rapprochant de a; si $x_0 > a$, x_n diminue avec n en se rapprochant de a.

Si $\varphi'(x)$ est négatif pour les mêmes valeurs de x, $x_n - a$ et $x_{n-1} - a$ sont de signes contraires, x_n oscille autour de la racine a en s'en rapprochant de plus en plus.

151. *On donne un demi-cercle de centre* O *limité par le diamètre* AA′ *et la demi-circonférence* ABA′ *et on propose de déterminer sur cette demi-circonférence un point* M *tel que la droite joignant le point* M *au milieu* P *du rayon* OA *partage le demi-cercle en deux aires équivalentes.*

1° *En prenant comme inconnue l'angle x, exprimé en radians, que fait le rayon* OM *avec le rayon* OB *perpendiculaire à* AA′, *montrer que ce nombre x est racine de l'équation*

$$(1) \qquad x = \frac{1}{2}\cos x.$$

2° *Calculer l'angle x par la méthode de Newton avec l'approximation que comportent les tables de logarithmes.*

3° *Résoudre l'équation* (1) *par approximations successives en calculant les nombres x_1, x_2, x_3, x_4, donnés par les formules*

$$x_1 = \frac{1}{2}\cos x_0,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\cos x_1,$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\cos x_2,$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\cos x_3;$$

on prendra $x_0 = 0,5$.

(*Certificat de Mathématiques générales, Paris*, 1915.)

2° On peut résoudre l'équation (1), comme nous avons résolu l'équation $x = \cos x$ au n° 147.

Posons $f(x) = 2x - \cos x$. Nous avons

$$f(0,45) = -0,00045, \qquad f(0,46) = 0,02396.$$

Appliquons la méthode de Newton à 0,46. On a

$$\frac{f(0,46)}{f'(0,46)} = \frac{0,02396}{2,44394} = 0,009803\ldots,$$

la nouvelle valeur approchée par excès de la racine est

$$0,46 - 0,009803 = 0,450197.$$

L'erreur commise est moindre que

$$\frac{h^2 M}{2f'(0,46)},$$

M étant le maximum de la valeur absolue de $f''(x)$ dans l'intervalle (0,45, 0,46).

Or $\qquad f''(x) = \cos x, \qquad$ donc $\qquad f''(x) < \cos 0,45.$

En calculant $f(0,45)$, on a obtenu

$$\cos 0,45 = 0,90045;$$

on peut donc prendre $M = 0,91$, et l'on a

$$\frac{h^2 M}{2f'(0,46)} < \frac{h^2 0,91}{4,8} < \frac{h^2}{5},$$

et, comme $h < \frac{1}{100}$,

$$\frac{h^2 M}{2f'(0,46)} < \frac{2}{10^5}.$$

La racine est donc comprise entre 0,450197 et 0,450177.

Si nous substituons 0,45018, nous obtenons

$$f(0{,}45018) = 0,$$

à l'approximation des tables de logarithmes.

On peut donc prendre 0,45018 comme valeur de la racine à $\frac{1}{10^5}$ près.

Appliquons maintenant la méthode des approximations successives.

Nous établissons aisément le tableau suivant :

	x	$\frac{200x}{\pi}$	$\cos x$
x_0	0,5	31,8310	0,87758
x_1	0,43879	27,9342	0,90524
x_2	0,45262	28,8147	0,89932
x_3	0,44966	28,6262	0,90066
x_4	0,45033		

On obtient

$$x_4 = 0{,}45033;$$

c'est une valeur approchée par excès de la racine.

Cherchons une limite de l'erreur commise. Nous avons (150)

$$|x_4 - a| < |x_0 - a|\, k^4.$$

Or ici $\varphi(x) = \frac{1}{2}\cos x,\ \ \varphi'(x) = -\frac{1}{2}\sin x.$

Comme $x < 32^g$, on a $x < 30^\circ$, $\sin x < \frac{1}{2}$ et $|\varphi'(x)| < \frac{1}{4}$.

D'autre part, a étant compris entre 0,45 et 0,46, $|x_0 - a|$ est moindre que 0,05 ; on a donc

$$|x_4 - a| < \frac{0{,}05}{4^4} < \frac{2}{10^4}.$$

On en conclut que la racine est comprise entre 0,45033 et 0,45013.

Si l'on voulait avoir une erreur plus petite que $\frac{1}{10^5}$, il faudrait déterminer n de façon que

$$\frac{0,05}{4^n} < \frac{1}{10^5}, \qquad \text{ou} \qquad 4^n > 5\,000,$$

et ceci donne $n = 7$.

Poursuivons le calcul, nous avons

	x	$\frac{200x}{\pi}$	$\cos x$
x_4	0,45033	28.6689	0,90030
x_5	0,45015	28.6574	0.90038
x_6	0,45019	28,6600	0,90036
x_7	0,45018		

On obtient ainsi la racine à $\frac{1}{10^5}$ près

$$0,45018.$$

D'ailleurs, en poursuivant la méthode, on trouve

$$\frac{200x_7}{\pi} = 28,6593, \qquad \cos x_7 = 0,90036,$$

et

$$x_8 = 0,45018.$$

On ne peut avoir plus d'approximation avec les tables de logarithmes à cinq décimales.

On remarquera que les valeurs x_1, x_2, x_3,... oscillent autour de la racine : c'est d'ailleurs conforme à la remarque du n° 150, puisque la dérivée de la fonction $\frac{1}{2}\cos x$ est négative.

152. *Appliquer la méthode des approximations successives à l'équation de Képler*

$$u = e \sin u + \zeta.$$

Dans cette équation, l'inconnue u et la constante donnée ζ sont des angles exprimés en radians, et le nombre e est un nombre positif plus petit que 1.

On a ici

$$\varphi(u) = e \sin u + \zeta, \qquad \varphi'(u) = e \cos u,$$

et par suite

$$|\varphi'(u)| < e.$$

On aura alors, en désignant par a la racine,

$$|u_n - a| < |u_0 - a| \,.\, e^n.$$

On prend généralement $u_0 = \zeta$, on a alors

$$u_0 - a = \zeta - a = -e \sin a,$$

et

$$|u_0 - a| < e.$$

On en déduit

$$|u_n - a| < e^{n+1}.$$

En astronomie, on exprime les angles en degrés, minutes et secondes sexagésimales. Si l'on veut que l'erreur soit moindre qu'une seconde sexagésimale (ce qui est d'ailleurs l'approximation maximum qu'on peut obtenir avec les tables à cinq décimales), il faut qu'on ait

$$e^{n+1} < \frac{\pi}{180 \times 60 \times 60}, \qquad \text{ou} \qquad e^{n+1} < \frac{5}{10^6}.$$

De cette inégalité on déduira le nombre n des opérations à faire.

153. *Résoudre l'équation de Képler*

$$u = e \sin u + \zeta,$$

où l'on a

$$e = 0{,}01677, \qquad \zeta = 150^\circ.$$

(*Licence*, *Paris*, 1891.)

Nous avons

$$e^3 < \frac{17^3}{10^9} < \frac{5}{10^6};$$

il suffira de deux opérations pour avoir la racine à $1''$ près.

Pour que u et ζ désignent les valeurs des angles en secondes sexagésimales, il faut remplacer dans l'équation u et ζ respectivement par $\frac{\pi u}{648\,000}$ et $\frac{\pi\zeta}{648\,000}$; l'équation devient alors

$$u = \lambda \sin u + \zeta,$$

en posant $\lambda = \frac{648\,000 e}{\pi}$.

Appliquons maintenant la méthode des approximations successives en prenant $u_0 = \zeta$; nous avons

$$u_1 = \lambda \sin \zeta + \zeta,$$
$$u_2 = \lambda \sin u_1 + \zeta.$$

Calcul de $\log \lambda$.

$$\log 648\,000 = 5,81158$$
$$\log e = \bar{2},22453$$
$$-\log \pi = \bar{1},50285$$
$$\log \lambda = 3,53896$$

Calcul de $\lambda \sin \zeta$.

$$\log \lambda = 3,53896$$
$$\log \sin \zeta = \bar{1},69897$$
$$\log \lambda \sin \zeta = 3,23793$$
$$\lambda \sin \zeta = 1729'' = 28'\,49''$$

$$u_1 = 150^\circ\, 28'\, 49''.$$

Calcul de $\log \sin u_1$.

$$u_1 = 180^\circ - 29^\circ\, 31'\, 11''$$

$\Delta = 23$

$29^\circ\, 31'$	$\bar{1},69256$
$10''$	$3,8$
$1''$	$0,38$

$$\log \sin u_1 = \bar{1},69260$$

Calcul de $\lambda \sin u_1$.

$$\log \lambda = 3,53896$$
$$\log \sin u_1 = \bar{1},69260$$
$$\log \lambda \sin u_1 = 3,23156$$
$$\lambda \sin u_1 = 1704'' = 28'\,24''$$

$$u_2 = 150^\circ\, 28'\, 24''.$$

Telle est la valeur de la racine à $1''$ près.

On peut d'ailleurs le vérifier en continuant l'opération et en calculant u_3 par la formule

$$u_3 = \lambda \sin u_2 + \zeta.$$

Calcul de $\log \sin u_2$.

$u_2 = 180^\circ - 29^\circ\, 31'\, 36''$

$\Delta = 23$

$29^\circ\, 31'$	$\bar{1},69256$
$30''$	$11,5$
$6''$	$2,3$

$\log \sin u_2 = \bar{1},69270$

Calcul de $\lambda \sin u_2$.

$$\log \lambda = 3,53896$$
$$\log \sin u_2 = \bar{1},69270$$
$$\log \lambda \sin u_2 = 3,23166$$

$$\lambda \sin u_2 = 1704'' = 28'\, 24''$$

$$u_3 = 150^\circ\, 28'\, 24''.$$

On a ainsi $u_3 = u_2$, ce qui montre que u_2 est la valeur de la racine à $1''$ près.

154. *Résoudre l'équation de Képler*

$$u = e \sin u + \zeta,$$

pour les valeurs suivantes de e et de ζ :

$$\log e = \bar{1},42369, \qquad \zeta = 19^\circ\, 35'\, 40''.$$

Poursuivre les calculs jusqu'à être assuré que l'erreur commise sur u ne dépasse pas $2'$ *en valeur absolue. Combien faudrait-il faire d'approximations ultérieures pour obtenir une erreur au plus égale à* $1''$?

(*Certificat d'Astronomie, Montpellier*, 1913.)

Pour que l'erreur soit moindre que $2'$, il faut qu'on ait

$$e^{n+1} < \frac{\pi}{180 \times 30},$$

ou

$$(n+1) \log e < \log \pi - \log 5\,400.$$

Cette inégalité s'écrit successivement

$$(n+1)\,\bar{1},42369 < \bar{4},76476,$$
$$-(n+1)\,0,57631 < -3,23524,$$
$$n+1 > \frac{3,23524}{0,57631}.$$

Cette inégalité est vérifiée si l'on a

$$n+1 \geqslant 6, \quad \text{ou} \quad n \geqslant 5.$$

Pour que l'erreur soit moindre que $1''$, il faut qu'on ait

$$e^{n+1} < \frac{\pi}{180 \times 60 \times 60},$$

ou

$$n+1 > \frac{5,31442}{0,57631},$$

$$n+1 \geqslant 10, \quad n \geqslant 9.$$

Il faudra faire au plus cinq opérations pour avoir la racine à $2'$ près, et neuf pour l'avoir à $1''$ près.

Nous allons d'ailleurs vérifier ce résultat en poussant le calcul jusqu'à ce qu'on arrive à deux valeurs consécutives u_n et u_{n-1}, égales à $1''$ près.

Nous écrivons l'équation

$$u = \lambda \sin u + \zeta,$$

en posant $\lambda = \dfrac{648\,000\,e}{\pi}$; de cette façon, u et ζ sont les valeurs des angles en secondes sexagésimales.

Nous calculerons successivement u_1, u_2, u_3,... par les formules

$$u_1 = \lambda \sin \zeta + \zeta,$$
$$u_2 = \lambda \sin u_1 + \zeta,$$
$$u_3 = \lambda \sin u_2 + \zeta,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n = \lambda \sin u_{n-1} + \zeta.$$

On voit aisément que la racine a est comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; par suite, la dérivée de $e \sin u + \zeta$ est positive; de plus $u_0 - a$, qui est égal à $-e \sin a$, est négatif. Donc les valeurs u_1, u_2, u_3,... iront en croissant en se rapprochant de a : cela résulte de la remarque du n° 150.

$$\log 648000 = 5,81158$$
$$\log e = 1,42369$$
$$-\log \pi = \bar{1},50285$$
$$\log \lambda = 4,73812$$

Calcul de u_1.

$\Delta = 36$

19° 35′	$\bar{1},52527$
40″	24

$$\log \sin \zeta = \bar{1},52551$$
$$\log \lambda = 4,73812$$
$$\log \lambda \sin \zeta = 4,26363$$
$$\lambda \sin \zeta = 18350'' = 5^\circ\, 5'\, 50''$$
$$u_1 = 24^\circ\, 41'\, 30''$$

Calcul de u_2.

$\Delta = 28$

24° 41′	$\bar{1},62076$
30″	14

$$\log \sin u_1 = \bar{1},62090$$
$$\log \lambda = 4,73812$$

$\Delta = 19$

$$\log \lambda \sin u_1 = 4,35902$$

889	2285
13	7

$$\lambda \sin u_1 = 22857'' = 6^\circ\, 20'\, 57''$$
$$u_2 = 25^\circ\, 56'\, 37''$$

Calcul de u_3.

$\Delta = 26$

25° 56′	$\bar{1},64080$
30″	13
7″	3

$$\log \sin u_2 = \bar{1},64096$$
$$\log \lambda = 4,73812$$

$\Delta = 18$

$$\log \lambda \sin u_2 = 4,37908$$

894	2393
14	8

$$\lambda \sin u_2 = 23938'' = 6^\circ\, 38'\, 58''$$
$$u_3 = 26^\circ\, 14'\, 38''$$

Calcul de u_4.

$\Delta = 26$

26° 14′	$\bar{1},64545$
30″	13
8″	3,5

$$\log \sin u_3 = \bar{1},64562$$
$$\log \lambda = 4,73812$$

$\Delta = 18$

$$\log \lambda \sin u_3 = 4,38374$$

64	2419
10	6

$$\lambda \sin u_3 = 24196'' = 6^\circ\, 43'\, 16''$$
$$u_4 = 26^\circ\, 18'\, 56''$$

Calcul de u_5.

$\Delta = 26$

26° 18′	$\bar{1},64647$
50″	21,7
6″	2,6

$$\log \sin u_4 = \bar{1},64671$$
$$\log \lambda = 4,73812$$

$\Delta = 18$

$$\log \lambda \sin u_4 = 4,38483$$

71	2425
12	7

$$\lambda \sin u_4 = 24257'' = 6^\circ\, 44'\, 17''$$
$$u_5 = 26^\circ\, 19'\, 57''$$

Calcul de u_6.

$\Delta = 25$

26° 19′	$\bar{1},64673$
50″	20,8
7″	2,9

$$\log \sin u_5 = \bar{1},64697$$
$$\log \lambda = 4,73812$$

$\Delta = 18$

$$\log \lambda \sin u_5 = 4,38509$$

7	2427
2	1

$$\lambda \sin u_5 = 24271'' = 6^\circ\, 44'\, 31''$$
$$u_6 = 26^\circ\, 20'\, 11''$$

Calcul de u_7.

		$\Delta = 26$
$26^\circ\, 20'$	$\bar{1},64698$	
$10''$	$4,3$	
$1''$	$0,43$	
$\log \sin u_6 = \bar{1},64703$		
$\log \lambda = 4,73812$		$\Delta = 18$
$\log \lambda \sin u_6 = 4,38515$		
	07	2427
	8	4

$$\lambda \sin u_6 = 24274'' = 6^\circ\, 44'\, 34''$$
$$u_7 = 26^\circ\, 20'\, 14''$$

Calcul de u_8.

		$\Delta = 2$
$26^\circ\, 20'$	$\bar{1},64698$	
$10''$	$4,3$	
$4''$	$1,73$	
$\log \sin u_7 = \bar{1},64704$		
$\log \lambda = 4,73812$		$\Delta = 1$
$\log \lambda \sin u_7 = 4,38516$		
	07	2427
	9	5

$$u_8 = 26^\circ\, 20'\, 15''.$$

En continuant, on trouve $u_9 = u_8$; donc la valeur de la racine à $1''$ près est

$$26^\circ\, 20'\, 15''.$$

On peut remarquer que u_5 diffère de cette racine d'une quantité inférieure à $2'$.

155. *Résoudre par la méthode des approximations successives l'équation de Képler*

$$u = e \sin u + \zeta,$$

pour

$$\zeta = 31^\circ, \qquad \log e = \bar{1},38976.$$

Au bout de deux ou trois applications de la méthode, dire sur quelle approximation on peut compter.

(*Certificat d'Astronomie, Montpellier*, 1913.)

On trouve successivement

$$u_1 = 38^\circ\, 14'\, 23'', \qquad u_2 = 39^\circ\, 42'\, 2'',$$
$$u_3 = 39^\circ\, 58'\, 45'', \qquad u_4 = 40^\circ\, 1'\, 54'',$$
$$u_5 = 40^\circ\, 2'\, 30'', \qquad u_6 = 40^\circ\, 2'\, 37'',$$
$$u_7 = 40^\circ\, 2'\, 38'', \qquad u_8 = u_7.$$

156. *Résoudre l'équation de Képler*

$$x - e \sin x = \mathrm{M},$$

en supposant

$$\mathrm{M} = 332^\circ\, 28'\, 55'', \qquad e = 0{,}24532.$$

(*Certificat d'Astronomie*, *Paris*, 1907.)

157. *Calculer à* $\dfrac{1}{10\,000}$ *près les abscisses des points de contact des tangentes menées par l'origine des coordonnées à la courbe*

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

On pourra d'abord ramener l'équation du problème à la forme

$$\mathrm{L}\frac{x+1}{x-1} - 2x = 0.$$

(*Certificat de Mathématiques générales*, *Paris*, 1911.)

Pour que la tangente au point (x, y) passe par l'origine, il faut qu'on ait

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2x};$$

on en déduit

$$e^x(x-1) = e^{-x}(x+1), \qquad \text{ou} \qquad e^{2x} = \frac{x+1}{x-1},$$

ou enfin

$$2x = \mathrm{L}\frac{x+1}{x-1}.$$

On voit aisément que cette équation admet deux racines opposées, supérieures à 1 en valeur absolue. Nous calculerons la positive.

Multiplions l'équation précédente par le module M, ($\mathrm{M} = \log e$), nous obtenons

$$f(x) = 2\mathrm{M}x - \log\frac{x+1}{x-1} = 0.$$

Pour $x = 1 + \varepsilon$, $f(x)$ est infini négatif; pour $x = 2$, $f(x)$ est positif, donc la racine est comprise entre 1 et 2. Substituons 1,1, nous avons

$$f(1{,}1) = 2{,}2\mathrm{M} - \log 21\,;$$

on calcule aisément 2,2M au moyen des tables qui donnent les multiples de M (*), et l'on a

$$\begin{array}{r} 2{,}2\mathrm{M} = 0{,}95545 \\ -\log 21 = 2{,}67778 \\ \hline f(1{,}1) = 1{,}63323, \end{array}$$

résultat négatif.

De même,

$$f(1{,}2) = 2{,}4\mathrm{M} - \log 11$$

$$\begin{array}{r} 2{,}4\mathrm{M} = 1.04231 \\ -\log 11 = 2{,}95861 \\ \hline f(1{,}2) = 0{,}00092, \end{array}$$

résultat positif.

Par suite, la racine est comprise entre 1,1 et 1,2 et semble très voisine de 1,2; c'est ce qu'il est facile de vérifier.

En effet,

$$f(1{,}19) = 2{,}38\mathrm{M} - \log \frac{219}{19}$$

$$\begin{array}{r} 2.38\mathrm{M} = 1{,}03362 \\ \log 219 = 3{,}65956 \\ \log 19 = 1{,}27875 \\ \hline f(1{,}19) = 1{,}97193 < 0. \end{array}$$

$$f(1{,}199) = 2{,}398\mathrm{M} - \log \frac{2\,199}{199}$$

$$\begin{array}{r} 2{,}398\mathrm{M} = 1{,}04144 \\ -\log 2\,199 = 4{,}65777 \\ \log 199 = 2{,}29885 \\ \hline f(1{,}199) = \bar{1}{,}99806 = -0{,}00194. \end{array}$$

(*) Voir à la fin du volume.

On voit ainsi que la racine est comprise entre 1,199 et 1,2; on obtient sa valeur à 0,001 près.

Nous allons maintenant appliquer la méthode des parties proportionnelles, qui nous donnera une valeur par excès, puisque $f''(x)$ est négative dans l'intervalle envisagé.

Nous obtenons

$$\frac{0{,}00092 \times 1{,}199 + 0{,}00194 \times 1{,}2}{0{,}00092 + 0{,}00194} = \frac{0{,}00343108}{0{,}00286},$$

ou

$$1{,}19967832\ \ldots.$$

Substituons 1,1996, nous avons

$$f(1{,}1996) = 2{,}3992\mathrm{M} - \log\frac{21\,996}{1\,996}$$

$$\begin{aligned} 2{,}3992\mathrm{M} &= 1{,}04196 \\ -\log 21996 &= \bar{5}{,}65766 \\ \log 1\,996 &= 3{,}30016 \\ \hline f(1{,}1996) &= \bar{1}{,}99978 < 0. \end{aligned}$$

Donc la racine est supérieure à 1,1996; elle est comprise entre 1,1996 et 1,19968. Sa valeur à $\frac{1}{10\,000}$ près par défaut est

$$1{,}1996.$$

158. *L'équation*

$$\operatorname{tg}\theta + 2\theta = 0$$

a une racine voisine de $\frac{\pi}{2}$, *soit* $\frac{\pi}{2} + \omega$.

Calculer, avec l'approximation que comportent les tables employées, la valeur x en grades et fraction décimale de grade de l'angle mesuré par l'arc ω *du cercle de rayon un.*

L'on emploiera la méthode de résolution suivante :

L'équation donnée peut s'écrire

$$\log\cot x = \log\pi + \log\left(1 + \frac{x}{100}\right);$$

$\frac{x}{100}$ *étant petit, l'équation*

$$\log \cot x_1 = \log \pi$$

donne une valeur approchée x_1 *de* x.

Une valeur plus approchée x_2 *est donnée par*

$$\log \cot x_2 = \log \pi + \log\left(1 + \frac{x_1}{100}\right).$$

Enfin, de x_2 *l'on peut déduire une valeur encore plus approchée* x_3 *par le même procédé.*

Si l'on calcule la valeur $f(x_3)$ *de l'expression*

$$\log \cot x_3 - \log \pi\left(1 + \frac{x_3}{100}\right),$$

la valeur cherchée x *sera obtenue par la résolution de l'équation*

$$\frac{x - x_3}{-f(x_3)} = k,$$

où la constante k *a une valeur que l'on calculera à l'aide des tables.*

(*École des Mines de Saint-Étienne*, 1909.)

De la relation

$$\log \cot x_1 = \log \pi = 0,49715,$$

on déduit

$$x_1 = 19,6187,$$

en prenant le grade pour unité.

On a ensuite

$$1 + \frac{x_1}{100} = 1,196187, \qquad \log\left(1 + \frac{x_1}{100}\right) = 0,07780,$$

puis

$$\log \cot x_2 = \log \pi + \log\left(1 + \frac{x_1}{100}\right) = 0,57495$$

et

$$x_2 = 16,5570.$$

De même,

$$1+\frac{x_2}{100}=1{,}16557, \qquad \log\left(1+\frac{x_2}{100}\right)=0{,}06654,$$

$$\log\cot x_3=\log\pi+\log\left(1+\frac{x_2}{100}\right)=0{,}56369,$$

$$x_3=16{,}9718.$$

Calculons maintenant $f(x_3)$. Nous avons

$$f(x_3)=\log\cot x_3-\log\pi-\log\left(1+\frac{x_3}{100}\right),$$

ou

$$f(x_3)=-0{,}00154.$$

Si nous appliquons maintenant la formule d'approximation de Newton, nous avons

$$x-x_3=-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)},$$

ce qui montre que la constante k de l'énoncé est égale à $\frac{1}{f'(x_3)}$.

Posons

$$f(x)=\log\cot x-\log\pi-\log\left(1+\frac{x}{100}\right),$$

x étant exprimé en grades.

Pour calculer la dérivée de $f(x)$ par rapport à x, il faut bien observer que les dérivées connues des fonctions trigonométriques sont prises en supposant que la variable indépendante est exprimée en radians.

Par exemple, la dérivée de $\cot x$ est $\frac{-1}{\sin^2 x}$, x désignant des radians.

Mais supposons que x désigne des grades, et soit u la valeur de x en radians, nous avons $u=\frac{\pi x}{200}$; la dérivée de $\cot x$ par rapport à x sera

$$\frac{d}{dx}\cot x=\frac{d}{du}\cot x\,.\,\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}\cot u\,.\,\frac{\pi}{200}$$

ou

$$\frac{-1}{\sin^2 u}\cdot\frac{\pi}{200}, \qquad \text{ou enfin} \qquad \frac{-1}{\sin^2 x}\cdot\frac{\pi}{200}.$$

Nous aurons donc

$$f'(x) = \frac{\log e}{\cot x} \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} \cdot \frac{\pi}{200} - \frac{\log e}{1 + \frac{x}{100}} \cdot \frac{1}{100},$$

ou

$$f'(x) = -\log e \left[\frac{\pi}{100 \sin 2x} + \frac{1}{100 + x} \right],$$

et par suite

$$f'(x_3) = -\log e \left[\frac{\pi}{100 \sin 2x_3} + \frac{1}{100 + x_3} \right].$$

On calcule aisément

$$2x_3 = 33{,}9436, \qquad \log \sin 2x_3 = \bar{1}{,}70610,$$

$$\log \frac{\pi}{100 \sin 2x_3} = \log \frac{\pi}{100} - \log \sin 2x_3 = \bar{2}{,}79105$$

et

$$\frac{\pi}{100 \sin 2x_3} = 0{,}06181.$$

D'autre part,

$$\log(100 + x_3) = 2{,}06808$$

et

$$\frac{1}{100 + x_3} = 0{,}00855.$$

On a donc

$$f'(x_3) = -\mathrm{M}.0{,}07036 = -0{,}03056$$

et on en déduit

$$x - x_3 = -\frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -\frac{0{,}00154}{0{,}03056} = -0{,}0504,$$

et

$$x = 16{,}9214.$$

Comme vérification, on peut remplacer x par cette valeur dans l'équation

$$\log \cot x = \log \pi + \log \left(1 + \frac{x}{100} \right);$$

les deux membres prennent la même valeur numérique 0,56504, à l'approximation des tables à cinq décimales.

159. *Dire combien l'équation*

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} - \frac{x}{2} - \frac{1}{5} = 0$$

a de racines. Calculer les racines à 0,01 *près.*

(*Certificat de Mathématiques générales*, *Lyon*, 1918.)

On mettra l'équation sous la forme

$$\mathrm{L}\frac{5x + 12}{8 - 5x} = x,$$

et on reconnaîtra qu'elle a une seule racine comprise entre — 1,87 et — 1,86.

160. *Combien l'équation*

$$\log x + \frac{2}{3 + 18x} + 0{,}63436 = 0$$

a-t-elle de racines positives, le logarithme étant un logarithme vulgaire (*base* 10)*?*

Calculer avec trois décimales la racine ou les racines positives de cette équation. On pourra se contenter d'appliquer dans ce but la méthode des substitutions.

(*École des Ponts et Chaussées*, 1913.)

Le premier membre de l'équation est une fonction croissante qui a une seule racine positive, dont la valeur à $\frac{1}{1000}$ près par défaut est 0,083.

161. *Montrer que l'équation*

$$f(x) \equiv (4 - 3x^2)\sin x - 4x\cos x = 0$$

admet une racine comprise entre $\frac{\pi}{2}$ *et* π, *et calculer cette racine à* 0,001 *près.*

(Poisson.)

On verra facilement que la dérivée $f'(x)$ admet une racine α comprise entre 0 et π; quand x croît de 0 à α, $f(x)$ décroît de 0 à un minimum négatif, et quand x croît de α à π, $f(x)$ croît de ce minimum à une valeur positive. Par suite, $f(x)$ s'annule une seule fois pour une valeur de x comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π.

La valeur de cette racine à $\frac{1}{1\,000}$ près par défaut est 2,563.

162. *On donne l'équation*

$$x^3 + 6x^2 - (\alpha - 12)x - (2\alpha - \sin\alpha - 8) = 0.$$

Montrer qu'il existe au moins une valeur réelle de α pour laquelle l'équation a deux racines égales; indiquer avec assez de précision un procédé aussi simple que possible pour calculer la valeur ou les valeurs de α qui correspondent aux racines égales de l'équation proposée.

(*École des Ponts et Chaussées*, **1914**.)

L'équation donnée peut s'écrire

$$(x+2)^3 - \alpha(x+2) + \sin\alpha = 0;$$

par suite, pour qu'elle ait deux racines égales, il faut qu'on ait

$$(1) \qquad -4\alpha^3 + 27\sin^2\alpha = 0.$$

Pour discuter cette équation, on peut étudier les variations de la fonction

$$f(\alpha) = \alpha - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\sin^{\frac{2}{3}}\alpha;$$

on verra que $f'(\alpha)$ a le signe de $\operatorname{tg}\alpha - 1$, et on en conclura que la fonction $f(\alpha)$ a une seule racine comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π.

Pour la calculer, on désigne par u la valeur de α en grades et l'équation (1) devient

$$3 \log u - 2 \log \sin u + 3 \log \frac{\pi}{200} + \log 4 - \log 27 = 0,$$

ou

$$3 \log u - 2 \log \sin u + \bar{7},75906 = 0.$$

La racine est $117^g,339$ à $\frac{1}{1\,000}$ de grade près.

163. 1° *Tracer la courbe figurative de la fonction*

$$y = (x - 1) 2^x - 1.$$

2° *Déduire de cette courbe que l'équation*

$$(1) \qquad (x - 1) 2^x - 1 = 0$$

n'a qu'une seule racine réelle.

3° *Obtenir le même résultat en se servant des deux courbes*

$$y = \frac{1}{x - 1}, \qquad y = 2^x.$$

4° *Calculer, avec une décimale exacte, la racine réelle de l'équation* (1) *en utilisant la méthode d'interpolation par parties proportionnelles. Ce calcul très simple devra être effectué sans le secours des tables.*

(*École des Ponts et Chaussées*, 1910.)

On trouve que la racine est comprise entre 1,3 et 1,4.

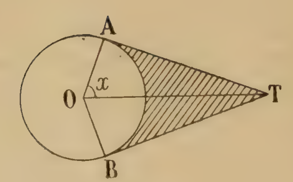
Avec le secours des tables de logarithmes, on peut obtenir aisément plus d'approximation. On peut mettre l'équation sous la forme

$$x \log 2 + \log (x - 1) = 0.$$

On trouve que la racine est comprise entre 1,383 et 1,384.

164. *Étant donné un cercle* O, *on demande de mener deux tangentes* TA, TB *de manière que l'aire du triangle curviligne hachuré* TAB *soit équivalente à celle du cercle.*

On prendra comme inconnue l'angle TOA $= x$, *et l'on calculera cet angle avec l'approximation que comportent les tables de logarithmes.*



(*Certificat de Mathématiques générales, Paris,* **1920.**)

L'angle x est racine de l'équation

$$\operatorname{tg} x - x - \pi = 0.$$

On trouve comme solution en radians 1,3518 à $\frac{1}{10^4}$ près, ou en grades $86^g,05$ à $\frac{1}{100}$ près.

165. *Trouver approximativement la racine différente de zéro de l'équation*

$$2x - \operatorname{tg} x = 0,$$

comprise entre 0 *et* $\frac{\pi}{2}$, *en s'aidant de la table de logarithmes et des méthodes d'approximation connues.*

(*École des Ponts et Chaussées,* **1906.**)

Réponse : $x = 1,1655$.

166. *Calculer à* $\frac{1}{100}$ *près la racine positive de l'équation*

$$\sin x + \frac{1}{10} \cos x = x.$$

(*Certificat de Mathématiques générales, Grenoble,* **1912.**)

Réponse : $x = 0,76$.

167. *Montrer que l'équation*

$$x \sin \frac{x}{2} = 1$$

admet une racine comprise entre 0 *et* $\frac{\pi}{2}$, *et calculer cette racine à* $\frac{1}{1\,000}$ *près.*

En désignant par u la valeur de la racine en grades, on peut écrire l'équation sous la forme

$$\log\frac{\pi}{200} + \log u + \log\sin\frac{u}{2} = 0;$$

et par de simples substitutions, on trouve que la racine est comprise entre $94^g,32$ et $94^g,33$.

La valeur en radians à $\frac{1}{1\,000}$ près est 1,481.

168. *Une chaîne* AB *placée sur un cylindre circulaire horizontal embrasse les* $\frac{3}{8}$ *de la circonférence d'une section droite; le coefficient de frottement a une valeur telle que la chaîne étant sur le point de glisser, l'extrémité* A *soit juste au niveau de l'axe du cylindre.*

Dans ces conditions, on démontre que ce coefficient de frottement x *est racine de l'équation*

$$(1 - 2x - x^2)e^{\frac{3\pi x}{4}} - 2x\sqrt{2} = 0.$$

1° *Montrer que cette équation a une racine et une seule répondant à la question.*

2° *Calculer cette racine à* $\frac{1}{100}$ *près en prenant*

$$\log e^{\frac{3\pi}{4}} = 1,0232823.$$

(*École des Ponts et Chaussées*, 1914.)

On peut écrire l'équation sous la forme

$$e^{\frac{3\pi x}{4}} = \frac{2x\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+1+x)(\sqrt{2}-1-x)},$$

ou

$$x \log e^{\frac{3\pi}{4}} - \log 2\sqrt{2} - \log x + \log(\sqrt{2}+1+x) + \log(\sqrt{2}-1-x) = 0.$$

La racine est comprise entre 0,26 et 0,27.

169. *Calculer à* $\frac{1}{1\,000}$ *près la racine de chacune des équations*

$$x = \cos x - \sin x,$$
$$x = \cos x + \sin x.$$

On trouve pour la première 0,456 et pour la deuxième 1,258.

170. *Calculer à* $\frac{1}{1\,000}$ *près la plus petite racine positive de l'équation*

$$x = \cot x.$$

Réponse : $x = 0{,}860$.

171. *Dans un cercle de centre* O, *on considère un arc* AB *inférieur à la moitié de la circonférence. Sachant que la corde* AB *est égale à* $2a$ *et que l'aire limitée par la corde* AB *et l'arc* AB *est égale à* a^2, *calculer l'angle au centre* AOB.

Si l'on désigne par x la moitié de cet angle (exprimé en radians), on est conduit à résoudre l'équation

$$x - \sin x(\sin x + \cos x) = 0.$$

On trouve

$$x = 1,20600$$

à $\frac{1}{10^5}$ près, et en degrés, minutes et secondes,

$$69^\circ\, 05'\, 56''$$

à une seconde près.

172. *Calculer à* $\frac{1}{10^5}$ *près la racine de l'équation*

$$x + e^{\frac{2}{3}x} = 0.$$

Réponse : 0,64884.

173. *Calculer à* $\frac{1}{1\,000}$ *près la racine positive de l'équation*

$$\frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{21}{10},$$

(*École des Ponts et Chaussées*, 1910.)

Réponse : 0,543.

174. *Calculer à* $\frac{1}{1\,000}$ *près la racine de l'équation*

$$x^2 + \mathrm{L}x - 2 = 0.$$

Réponse : 1,314.

175. 1° *Montrer que l'équation*

$$xe^{-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right)} = 1$$

admet deux racines positives.

2° *Calculer la plus petite à* $\frac{1}{1\,000}$ *près.*

La valeur de la plus petite racine à $\frac{1}{1000}$ près par défaut est 0,387.

176. *Construire la courbe dont l'équation est*

$$y = \operatorname{tg} x - x.$$

Trouver, avec deux décimales, la racine comprise entre 1 *et* 1,1 *de l'équation*

$$\operatorname{tg} x - x = \frac{\pi}{4}.$$

(*École Normale*, 1910.)

On trouve pour valeur de la racine 1,07.

177. 1° *Démontrer que la fonction*

$$f(x) = \sin \pi x - x^4$$

admet une seule racine positive x_1.

2° *Calculer cette racine de façon que* πx_1 *soit connu en grades à un centième de grade près.*

On s'aidera de la table de logarithmes.

(*École des Ponts et Chaussées*, 1912.)

Si on désigne par u_1 la valeur de πx_1 en grades, on a $x_1 = \frac{u_1}{200}$.

On verra que u_1 est compris entre $167^g,36$ et $167^g,37$, et l'on a par suite, à $\frac{1}{10^4}$ près,

$$x_1 = 0,8368.$$

178. *Montrer que l'équation*

$$\int_0^x \frac{x^2 dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2}$$

n'a qu'une racine. Trouver deux entiers comprenant cette racine. La calculer par approximation.

(*Certificat de Mathématiques générales, Grenoble*, 1906.)

La racine est égale à 1,475 à $\frac{1}{1\,000}$ près par défaut.

179. *Montrer que l'équation*

$$e^{-x} - x = 0$$

n'a qu'une racine. Calculer cette racine à $\frac{1}{100}$ *près.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Grenoble*, 1906.)

Réponse : 0,56.

180. *Calculer avec trois chiffres significatifs les deux racines réelles de l'équation*

$$x^2 - 10 \log x - 3 = 0.$$

(*Certificat de Mathématiques générales, Toulouse*, 1907.)

Réponses : 0,535 et 2,70.

181. *Un arc de cercle a une longueur de* 3^{dm} *: sa corde une longueur de* $2^{\text{dm}},5$; *trouver le rayon du cercle à* 1^{mm} *près.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Clermont*, 1906.)

On trouve 146^{mm}.

182. *Étant donnés un cercle de rayon unité et un diamètre* AA′ *de ce cercle, on demande de déterminer une corde* BC *perpendiculaire à ce diamètre* AA′, *telle que l'arc de cercle* BA′C *ait la même longueur que la corde* AB.

1° *Calculer, avec l'approximation que comportent les tables*

de logarithmes, la valeur de l'angle $A'AB = x$, *exprimé en degrés, minutes et secondes et donner une limite supérieure de l'erreur commise sur ce nombre* x.

2° *Calculer, dans les mêmes conditions, la différence des longueurs des cordes* AB *et* BC.

(*Certificat de Mathématiques générales, Paris*, 1918.)

183. *Construire la courbe*

$$y = \int_0^x \sin^2 x \cos^2 x \, dx.$$

On mène à cette courbe des tangentes par l'origine; calculer à $\frac{1}{100}$ *près l'abscisse de celui des points de contact qui a la plus petite abscisse positive.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Grenoble*, 1910.)

CHAPITRE VIII

EXERCICES DIVERS

184. *Soit l'équation*

$$L\frac{1-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2x}=-20+\frac{19\,500}{t+273},$$

dans laquelle on donne successivement à t les valeurs 600, 700, 800, 900. *A chacune des valeurs de t correspondent deux valeurs de* $\operatorname{tg}x$, *l'une positive, l'autre négative.*

On demande de calculer les valeurs positives de $\operatorname{tg}x$ *et les angles x compris entre* 0 *et* $\frac{\pi}{2}$ *correspondants.*

Le module de transformation des logarithmes népériens en logarithmes vulgaires est M = 0,43429.

(*École des Mines de Saint-Etienne*, 1912.)

Posons $A=-20+\frac{19\,500}{t+273}$, et multiplions par M les deux membres de l'équation donnée ; nous obtenons

$$\log\frac{1-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2x}=MA,$$

ou

$$\frac{1-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2x}=10^{MA}=B,$$

ou encore

$$B\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x-1=0.$$

Cette équation est vérifiée par deux valeurs de $\operatorname{tg} x$ qui sont de signes contraires. Nous allons rendre la positive calculable par logarithmes en appliquant le procédé habituel (tome I, n° 127).

Nous déterminons un angle aigu φ par la formule

$$\operatorname{tg}\varphi = 2\sqrt{B}, \qquad \text{ou} \qquad \log\operatorname{tg}\varphi = \log 2 + \frac{1}{2}\log B,$$

ou encore

$$(1) \qquad \log\operatorname{tg}\varphi = \log 2 + \frac{MA}{2}$$

et la valeur positive de $\operatorname{tg} x$ est donnée par

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{B}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

ou

$$(2) \qquad \log\operatorname{tg} x = \log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \frac{MA}{2}.$$

Les formules (1) et (2) nous permettent de résoudre le problème.

Nous exprimerons les angles φ et x en grades.

Nous calculons tout d'abord log M et nous avons

$$\log M = \bar{1},63778.$$

Premier cas. $t = 600, \ A = -20 + \frac{19\,500}{873} = \frac{2\,040}{873}.$

Calcul de $\frac{MA}{2}$.

$$\begin{aligned}
\log M &= \bar{1},63778 \\
\log 2040 &= 3,30963 \\
-\log 873 &= \bar{3},05899 \\
-\log 2 &= \bar{1},69897 \\
\hline
\log\frac{MA}{2} &= \bar{1},70537 \qquad \Delta = 9
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr}
5 & 5074 \\
\hline
2 & 2
\end{array}$$

$$\frac{MA}{2} = 0,50742$$

Calcul de φ.

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0,30103 \\
\frac{MA}{2} &= 0,50742 \\
\hline
\log\operatorname{tg}\varphi &= 0,80845 \qquad \Delta = 45
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr}
30 & 90,18 \\
\hline
15 & \\
13,5 & 3 \\
\hline
1,5 & 3
\end{array}$$

$$\varphi = 90,1833$$

$$\frac{\varphi}{2} = 45,0916$$

Calcul de $\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.

$\Delta = 14$

45,09	$\bar{1},93274$
1	1,4
6	0,84

$\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \bar{1},93276$

Calcul de $\operatorname{tg} x$.

$\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \bar{1},93276$

$-\frac{\text{MA}}{2} = \bar{1},49258$

$\log \operatorname{tg} x = \bar{1},42534$ $\quad \Delta = 16$

21	2662
13	8

$\operatorname{tg} x = 0,26628$

Calcul de x.

$\Delta = 28$

$\log \operatorname{tg} x = \bar{1},42534$

13	16,56
21	
19,6	7
1,4	5

$x = 16,5675$

DEUXIÈME CAS. $t = 700, \ \text{A} = -20 + \frac{19\,500}{973} = \frac{40}{973}$.

Un calcul tout à fait semblable donne

$$\frac{\text{MA}}{2} = 0,0089268, \qquad \frac{\varphi}{2} = 35,5017,$$

$$\operatorname{tg} x = 0,61101, \qquad x = 34,9173.$$

TROISIÈME CAS. $t = 800, \ \text{A} = -20 + \frac{19\,500}{1\,073} = -\frac{1\,960}{1\,073}$.

Cette fois, A et $\frac{\text{MA}}{2}$ sont négatifs ; nous calculerons $\log \left| \frac{\text{MA}}{2} \right|$.

Calcul de $\frac{\text{MA}}{2}$.

$\log \text{M} = \bar{1},63778$

$\log 1960 = 3,29226$

$-\log 1073 = \bar{4},96940$

$-\log 2 = \bar{1},69897$

$\log \left| \frac{\text{MA}}{2} \right| = \bar{1},59841$ $\quad \Delta = 11$

35	3966
6	5

$\frac{\text{MA}}{2} = -0,39665$

Calcul de φ.

$\log 2 = 0,30103$

$\frac{\text{MA}}{2} = \bar{1},60335$

$\log \operatorname{tg} \varphi = \bar{1},90438$ $\quad \Delta = 14$

27	43,04
11	
9,8	7
1,2	8

$\varphi = 43,0478$

$\frac{\varphi}{2} = 21,5239$

Calcul de $\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.

$\Delta = 22$

21,52	$\bar{1}$,54596
3	6,6
9	1,98

$\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \bar{1},54605$

Calcul de $\operatorname{tg} x$.

$$\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \bar{1},54605$$
$$-\frac{MA}{2} = 0,39665$$
$$\log \operatorname{tg} x = \bar{1},94270$$
$$\operatorname{tg} x = 0,87640$$

Calcul de x.

$\Delta = 13$

$\log \operatorname{tg} x = \bar{1},94270$ | 45,81
67
3
2,6 | 2
0,4 | 3

$x = 45,8123.$

Quatrième cas. $t = 900$, $A = -20 + \frac{19\,500}{1\,173} = -\frac{3\,960}{1\,173}$.

Un calcul analogue donne

$$\frac{MA}{2} = -0,73308, \quad \frac{\varphi}{2} = 11,2743,$$
$$\operatorname{tg} x = 0,96796, \quad x = 48,9638.$$

Résultats.

t	$\operatorname{tg} x$	x (en grades)
600	0,26628	16,5675
700	0,61101	34,9173
800	0,87640	45,8123
900	0,96796	48,9638

185. *L'unité de longueur étant le mètre, on considère (axes* Ox *et* Oy *rectangulaires), la courbe exponentielle*

$$y = 2e^x.$$

Soient A *le point où cette courbe coupe* Oy, M *le point de la courbe dont l'abscisse est* 1,5, Q *sa projection sur* Oy.

1° *Calculer le volume qu'engendre, en tournant autour de* Oy, *le triangle mixtiligne* AMQ.

2° *Par le point de* Oy *dont l'ordonnée est* — 6, *on mène une tangente à la courbe exponentielle; calculer l'abscisse* x *du point de contact par la méthode d'approximation de Newton et par celle des parties proportionnelles.*

On rappelle que

$$e = 2,71828 \qquad et \qquad \log e = 0,43429.$$

(*École des Mines de Paris*, 1918.)

1° Le volume demandé est égal à l'intégrale définie

$$2\pi \int_0^{1,5} x^2 e^x dx = 2\pi \Big| e^x(x^2 - 2x + 2) \Big|_0^{1,5}$$

ou

$$2\pi e^{1,5}.1,25 - 4\pi = 22,6328.$$

2° L'abscisse du point de contact est racine de l'équation

$$e^x(x-1) - 3 = 0,$$

qu'on peut encore écrire

$$f(x) \equiv Mx + \log(x-1) - \log 3 = 0. \qquad (M = \log e).$$

Cette équation admet une racine comprise entre 1 et 2. On peut d'abord la calculer à 0,1 près.

Si nous substituons 1,6 et 1,7, nous avons

$$\begin{array}{rl} 1,6\,M &= 0,69487 \\ \log 0,6 &= \bar{1},77815 \\ -\log 3 &= \bar{1},52288 \\ \hline f(1,6) &= \bar{1},99590 \\ &= -0,00410. \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 1,7\,M &= 0,73830 \\ \log 0,7 &= \bar{1},84510 \\ -\log 3 &= \bar{1},52288 \\ \hline f(1,7) &= 0,10628 \end{array}$$

Donc la racine est comprise entre 1,6 et 1,7. De plus, elle semble très rapprochée de 1,6. Substituons 1,61, nous obtenons

$$\begin{array}{rl} 1,61\,M &= 0,69921 \\ \log 0,61 &= \bar{1},78533 \\ -\log 3 &= \bar{1},52288 \\ \hline f(1,61) &= 0,00742 \end{array}$$

Donc la racine est comprise entre 1,60 et 1,61.

Appliquons maintenant les méthodes d'approximation de Newton et des parties proportionnelles.

On a

$$f'(x) = M + \frac{M}{x-1} = \frac{Mx}{x-1},$$

$$f''(x) = -\frac{M}{(x-1)^2}.$$

Comme $f''(x)$ est négatif, nous appliquerons la méthode de Newton à 1,60 et la méthode des parties proportionnelles à 1,61.

Nous avons

$$f'(1,6) = \frac{M \times 1,6}{0,6} = 1,15812;$$

la correction de Newton est alors

$$-\frac{f(1,6)}{f'(1,6)} = \frac{0,0041}{1,15812} = 0,00354\ldots \quad \text{par défaut};$$

par suite

$$1,6 + 0,00354 \quad \text{ou} \quad 1,60354$$

est une valeur approchée par défaut de la racine.

D'autre part, la méthode des parties proportionnelles nous donne la valeur

$$\frac{0,0041 \times 1,61 + 0,00742 \times 1,6}{0,0041 + 0,00742} = \frac{0,018473}{0,01152}$$

ou

$$1,60356,$$

valeur approchée par excès.

On en conclut que la racine est 1,6035 à $\frac{1}{10^4}$ par défaut. C'est d'ailleurs ce qu'on peut vérifier par substitution

$1,6035\,M = 0,69639$	$1,6036\,M = 0,69643$
$\log 0,6035 = \bar{1},78068$	$\log 0,6036 = \bar{1},78075$
$-\log 3 = \bar{1},52288$	$-\log 3 = \bar{1},52288$
$f(1,6035) = \bar{1},99995$	$f(1,6036) = 0,00006$
$= -0,00005.$	

186. *x variant de 0 à π, on considère la courbe représentée par l'équation*

$$y = e^{-x\sqrt{2}} \sin x.$$

1° *Calculer le maximum de y.*

2° *Soit A le point correspondant de la courbe; calculer le rayon de courbure en ce point.*

3° *Soit B le point d'abscisse π. Calculer en degrés et minutes l'angle que fait en ce point la tangente à la courbe avec l'axe des x.*

4° *Calculer l'aire limitée par l'arc AB, l'ordonnée du point A et Ox.*

5° *Déterminer les coordonnées du point d'inflexion.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Lille*, 1912.)

1° On a

$$y' = e^{-x\sqrt{2}}(\cos x - \sqrt{2} \sin x),$$

par suite, l'abscisse du maximum de y est définie par l'équation

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \text{ou} \qquad \log \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2} \log 2 = -0{,}15051,$$

ou encore

$$\begin{array}{lrrr}
 & & & \Delta = 14 \\
\log \operatorname{tg} x = \bar{1},84949 & & & \\
 & \underline{5} & 39,18 & \\
 & 4 & & \\
 & \underline{2,8} & 2 & \\
 & 1,2 & 8 &
\end{array}$$

La valeur de x en grades est 39,1828, et en radians

$$\alpha = 39{,}1828 \times \frac{\pi}{200}.$$

On fait aisément ce produit en utilisant les multiples

de $\frac{\pi}{200}$, ce qui donne l'addition suivante :

$$\begin{array}{r l} & 0,47124 \\ & 0,141372 \\ & 0,0015708 \\ & 0,00125664 \\ & 0,000031416 \\ & 0,0000125664 \\ \hline \alpha = & 0,61548. \end{array}$$

La valeur de y correspondante est

$$\beta = e^{-\alpha\sqrt{2}} \sin \alpha,$$

d'où l'on tire

$$\log \beta = -\alpha\sqrt{2}\,M + \log \sin \alpha.$$

Calcul de $\log \alpha$. $\Delta = 7$

$$\begin{array}{ll} 6154 & 78916 \\ \quad 8 & \quad 5,6 \\ \hline \log \alpha = \bar{1},78922 & \end{array}$$

Calcul de $\log \sin \alpha$. $\Delta = 10$

$$\begin{array}{ll} 39,18 & \bar{1},76141 \\ \quad 28 & \quad 2,8 \\ \hline \log \sin \alpha = \bar{1},76144 & \end{array}$$

Calcul de $\alpha\sqrt{2}M$.

$$\begin{array}{rl} \log \alpha = & \bar{1},78922 \\ \log \sqrt{2} = & 0,15051 \\ \log M = & \bar{1},63778 \\ \hline \log(\alpha\sqrt{2}M) = & \bar{1},57751 \end{array} \qquad \Delta = 12$$

$$\begin{array}{rr} 49 & 3780 \\ \hline 2 & 2 \end{array}$$

$$\alpha\sqrt{2}M = 0,37802$$

Calcul de β.

$$\begin{array}{rl} \log \sin \alpha = & \bar{1},76144 \\ -\alpha\sqrt{2}M = & \bar{1},62198 \\ \hline \log \beta = & \bar{1},38342 \end{array} \qquad \Delta = 18$$

$$\begin{array}{rr} 28 & 2417 \\ \hline 14 & 8 \end{array}$$

$$\beta = 0,24178.$$

Les coordonnées du point A sont

$$\alpha = 0,61548, \qquad \beta = 0,24178.$$

2° Le rayon de courbure au point A est égal à $\frac{1}{|y''|}$ pour $x = \alpha$, puisqu'en ce point y' est nul.

On a $$y'' = e^{-x\sqrt{2}}(\sin x - 2\sqrt{2} \cos x),$$

et pour $x=\alpha \quad y''_\alpha = e^{-\alpha\sqrt{2}}(\sin\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha)$,

ou, en remarquant que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha$,

$$y''_\alpha = -3e^{-\alpha\sqrt{2}}\sin\alpha,$$

et par suite, en désignant par R le rayon de courbure,

$$R = \frac{e^{\alpha\sqrt{2}}}{3\sin\alpha},$$

$$\log R = \alpha\sqrt{2}M - \log 3 - \log\sin\alpha.$$

$$\begin{array}{rl} \alpha\sqrt{2}M = 0{,}37802 & \\ -\log 3 = \bar{1}{,}52288 & \\ -\log\sin\alpha = 0{,}23856 & \\ \hline \log R = 0{,}13946 & \quad \Delta = 31 \\ 25 & \quad 1\,378 \\ \hline 21 & \quad 7 \end{array}$$

$$R = 1{,}3787.$$

3° L'angle cherché φ est déterminé par l'équation

$$\operatorname{tg}\varphi = y'_\pi = -e^{-\pi\sqrt{2}}.$$

Ceci montre que l'angle φ est obtus; désignons par θ son supplément, nous avons $\operatorname{tg}\theta = e^{-\pi\sqrt{2}}$, ou

$$\log\operatorname{tg}\theta = -\pi\sqrt{2}M.$$

$$\begin{array}{rl} \log\pi = 0{,}49715 & \\ \log\sqrt{2} = 0{,}15051 & \\ \log M = \bar{1}{,}63778 & \\ \hline \log(\pi\sqrt{2}M) = 0{,}28544 & \quad \Delta = 23 \\ 33 & \quad 1\,929 \\ \hline 11 & \\ 9{,}2 & \quad 4 \\ \hline 1{,}8 & \quad 8 \end{array}$$

$$\pi\sqrt{2}M = 1{,}92948,$$

$$\log\operatorname{tg}\theta = \bar{2}{,}07052,$$

$$\theta = 0^\circ\,40'\,26'',$$

$$\varphi = 179^\circ\,19'\,34''.$$

4° L'aire demandée est égale à l'intégrale

$$S = \int_{\alpha}^{\pi} e^{-x\sqrt{2}} \sin x dx.$$

On trouve aisément la valeur de l'intégrale indéfinie

$$\int e^{-x\sqrt{2}} \sin x dx = -\frac{e^{-x\sqrt{2}}}{3}(\cos x + \sqrt{2} \sin x);$$

on en déduit

$$S = \frac{e^{-\pi\sqrt{2}}}{3} + \frac{e^{-\alpha\sqrt{2}} 2\sqrt{2} \sin \alpha}{3}.$$

Posons $S_1 = \frac{e^{-\pi\sqrt{2}}}{3}$, $S_2 = \frac{e^{-\alpha\sqrt{2}} 2\sqrt{2} \sin\alpha}{3}$;

nous avons

$$S = S_1 + S_2.$$

Calcul de S_2.

$\log e^{-\alpha\sqrt{2}} = \bar{1},62198$
$\log \sin \alpha = \bar{1},76144$
$\log 2\sqrt{2} = 0,45154$
$-\log 3 = \bar{1},52288$

$\log S_2 = \bar{1},35784$ $\quad \Delta = 19$
74 $\quad$ 2279
10 $\quad$ 5
$S_2 = 0,22795$

Calcul de S_1.

$\log e^{-\pi\sqrt{2}} = \bar{2},07052$
$-\log 3 = \bar{1},52288$

$\log S_1 = \bar{3},59340$
$S_1 = 0,003921$
$S_2 = 0,22795$
$S = 0,23187$

L'aire cherchée est 0,23187.

5° L'abscisse du point d'inflexion est définie par l'équation

$$\log \operatorname{tg} x = \log 2\sqrt{2} = 0,45154 \qquad \Delta = 22$$

43 $\quad$ 78,36
11 $\quad$ 50.

Sa valeur en grades est 78,3650, et en radians

$$a = 78,3650 \times \frac{\pi}{200}$$

$$\begin{array}{l} 1{,}09956 \\ 0{,}125664 \\ 0{,}0047124 \\ 0{,}00094248 \\ 0{,}000078540 \\ \hline a = 1{,}23096 \end{array}$$

L'ordonnée est alors $b = e^{-a\sqrt{2}} \sin a$, ou

$$\log b = -a\sqrt{2}\,\mathrm{M} + \log \sin a.$$

Calcul de $\log a$.

$\Delta = 35$

1230	08991
9	31,5
6	2,1

$\log a = 0{,}09025$

Calcul de $\log \sin a$.

$\Delta = 3$

78,36	$\bar{1}{,}97441$
50	1,5

$\log \sin a = \bar{1}{,}97443$

Calcul de $a\sqrt{2}\,\mathrm{M}$.

$$\begin{aligned} \log a &= 0{,}09025 \\ \log \sqrt{2} &= 0{,}15051 \\ \log \mathrm{M} &= \bar{1}{,}63778 \\ \hline \log(a\sqrt{2}\,\mathrm{M}) &= \bar{1}{,}87854 \end{aligned}$$

$\Delta = 6$

2	7560
2	3

$$\begin{aligned} a\sqrt{2}\,\mathrm{M} &= 0{,}75603 \\ -a\sqrt{2}\,\mathrm{M} &= \bar{1}{,}24397 \\ \log \sin a &= \bar{1}{,}97443 \\ \hline \log b &= \bar{1}{,}21840 \end{aligned}$$

$\Delta = 27$

27	1653
13	5

$b = 0{,}16535.$

Les coordonnées du point d'inflexion sont

$$1{,}23096 \quad \text{et} \quad 0{,}16535.$$

187. *Déterminer les coordonnées des pieds des normales menées par un point dont les coordonnées rectangulaires sont* $x = 1$, $y = 2$, *à l'ellipse représentée par l'équation*

$$x^2 + 4y^2 = 16.$$

(*Agrégation*, 1885.)

Les coordonnées d'un point de l'ellipse étant exprimées en fonction de l'anomalie excentrique par les formules

$$x = 4\cos\varphi, \qquad y = 2\sin\varphi,$$

on trouve que les φ des pieds des normales considérées sont les racines de l'équation

$$3 \sin \varphi \cos \varphi + \cos \varphi - \sin \varphi = 0,$$

ou

$$3 \sin 2\varphi + 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = 0.$$

En posant $\frac{\pi}{4} - \varphi = u$, et $\sin u = t$, on est ramené à résoudre l'équation du deuxième degré

$$6t^2 - 2\sqrt{2}\,t - 3 = 0.$$

On peut employer la méthode trigonométrique, en posant $\operatorname{tg}\theta = 3$; les racines sont alors

$$t_1 = \frac{\cot\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2}}, \qquad t_2 = -\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2}}.$$

On en déduit les valeurs suivantes pour u (en grades) :

$$u_1 = 87,60, \qquad u_2 = 200 - u_1,$$
$$u_3 = -34,0450, \qquad u_4 = 200 - u_3$$

et les valeurs de φ,

$$\varphi_1 = 50 - u_1, \qquad \varphi_2 = -100 - \varphi_1,$$
$$\varphi_3 = 50 - u_3, \qquad \varphi_4 = -100 - \varphi_3.$$

Les coordonnées des pieds des normales sont alors

$$\begin{cases} x_1 = 4\cos\varphi_1 = 3,3224, \\ y_1 = 2\sin\varphi_1 = -1,1137; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -4\sin\varphi_1 = +2,2274, \\ y_2 = -2\cos\varphi_1 = -1,6612; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_3 = 4\cos\varphi_3 = 0,9920, \\ y_3 = 2\sin\varphi_3 = 1,9375; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -4\sin\varphi_3 = -3,8750, \\ y_4 = -2\cos\varphi_3 = -0,4960. \end{cases}$$

188. *x et y étant les cooraonnées d'un point du plan, tracer la courbe définie par l'équation*

$$y = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} - 2x\right)}{\operatorname{tg} x}.$$

Déterminer :

1° *Les coordonnées des points de contact des tangentes parallèles à l'axe des* x ;

2° *Les coordonnées des autres points où ces tangentes rencontrent la courbe.*

On donnera les résultats avec toute la précision que comporte l'emploi des tables de logarithmes.

(*Agrégation*, 1890.)

Les valeurs de x qui annulent la dérivée de y sont en degrés 93° 54′ 1″ et 165° [dans l'intervalle (0,180°)], ou, en radians,

$$x_1 = 1{,}6389, \qquad x_2 = 2{,}8798,$$

et les valeurs de y correspondantes sont

$$y_1 = -0{,}009015, \qquad y_2 = -3{,}7320.$$

La droite $y = y_1$ rencontre la courbe en un autre point dont l'abscisse est en degrés 7° 51′ 57″, et en radians 0,13728, et la droite $y = y_2$ rencontre la courbe au point

$$x = \frac{\pi}{4} = 0{,}78540.$$

189. *Dans un cercle de rayon* R *on considère un segment compris entre un arc de mesure* 2α *et la corde de cet arc. Évaluer le volume engendré par ce segment tournant autour de sa corde.*

Application numérique au cas où

$$R = 1, \qquad \alpha = 28° \, 32';$$

limite de l'erreur si α *est connu à* 1′ *près.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Nancy*, 1910.)

Le volume demandé est égal à l'intégrale définie

$$V = 2\pi \int_0^{R \sin \alpha} (\sqrt{R^2 - x^2} - R \cos \alpha)^2 dx$$

ou

$$V = 2\pi R^3 \left(\sin \alpha - \frac{\sin^3 \alpha}{3} - \alpha \cos \alpha \right),$$

α étant exprimé en radians.

Pour $R = 1$, $\alpha = 28^\circ\, 32'$, on trouve

$$V = 0{,}02406.$$

Posons maintenant

$$f(\alpha) = 2\pi \left(\sin \alpha - \frac{\sin^3 \alpha}{3} - \alpha \cos \alpha \right).$$

Si l'on connaît α à $1'$ près, l'erreur est

$$\varepsilon = \Delta\alpha f'(\alpha + \theta\Delta\alpha),$$

où

$$\Delta\alpha < \frac{\pi}{180 \times 60} < \frac{3}{10^4}, \qquad f'(\alpha + \theta\Delta\alpha) < f'\left(\frac{\pi}{6}\right),$$

car $f'(\alpha)$ est une fonction croissante dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

Donc

$$\varepsilon < \frac{3}{10^4} f'\left(\frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{10^4}.$$

190. *Soit une ellipse de centre* O *et de sommets* A, B, *tels que l'on ait*

$$OA = 10^m, \qquad OB = 5^m;$$

A′, B′ *les milieux respectifs de* OA, OB; M, M′ *les points d'intersection de la droite* A′B′ *avec l'ellipse :*

1° *Calculer à* 1^{mm} *près les distances aux axes des points* M *et* M′.

2° *Calculer l'aire comprise entre la droite* MM′ *et l'arc d'ellipse* MABM′. *Indiquer l'approximation du résultat obtenu.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Caen,* 1914.)

Les anomalies excentriques des points M et M′ sont $\alpha - \frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4} - \alpha$, α étant l'angle aigu dont le sinus est égal à $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. On en déduit aisément les coordonnées de ces points.

L'aire cherchée peut être considérée comme la projection de l'aire d'un segment du cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre. Cette aire a pour valeur

$$\frac{a^2(\pi - 2\alpha)}{2} - \frac{a^2}{2}\sin 2\alpha,$$

et par suite l'aire demandée est

$$\frac{ab}{2}(\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha),$$

où $a = 10$, $b = 5$, $\sin\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

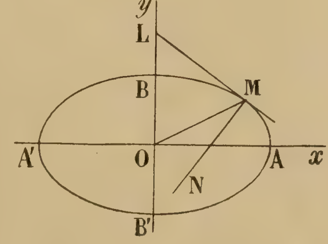
En faisant le calcul, on trouve $43^{m^2},938$.

191. *On considère l'ellipse* ABA′B′, *qu'on suppose représenter une méridienne de la surface terresire,* B′B *étant la ligne des pôles. L'équation de cette ellipse dans le système d'axes rectangulaires* Ox, Oy *sera*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

et l'on donne

$$a = 6\,378^{km}, \quad b = 6\,356^{km}.$$



Si M *est un point quelconque de la portion* AB *de l'ellipse,* ML *la tangente en* M *qui fait avec* Oy *un angle* φ *égal à la latitude du point* M, *la verticale apparente* MN *est la normale*

en M *à l'ellipse. Cette verticale fait avec* OM *un angle* θ *variable avec* φ.

On demande de calculer, à 1′ *près, la latitude pour laquelle* θ *est maximum et, à* 1″ *près, la valeur de ce maximum.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Bordeaux*, 1911.)

θ est donné en fonction de φ par la formule

$$\theta = \varphi - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi\right);$$

on en déduit que θ est maximum pour

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}, \qquad \text{ou} \qquad \varphi = 45^\circ\, 5'\, 56'',$$

et la valeur du maximum de θ est

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b} - \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} = 11'\, 52''.$$

192. *On considère, dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, *la chaînette dont l'équation est*

$$y = \operatorname{ch} x.$$

Soit M *un point quelconque de la chaînette*, P *sa projection sur* Ox, A *le sommet de la chaînette. Déterminer le point* M *par la condition que l'on ait*

$$\mathrm{OA} + \mathrm{PM} = \mathrm{OP} + \operatorname{arc}\mathrm{AM}.$$

On calculera les coordonnées du point cherché M *à* $\frac{1}{1\,000}$ *près.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Paris*, 1911.)

L'abscisse du point M est racine de l'équation

$$e^{-x} - x + 1 = 0.$$

Les coordonnées de ce point sont

$$x = 1{,}278, \qquad y = 1{,}935.$$

193. *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy, *sur lesquels les abscisses* x *et les ordonnées* y *sont mesurées en centimètres :*

1° *Construire la courbe* $y = x\mathrm{L}(1 + x^2)$.

(L *désigne le logarithme népérien. On donne* $\mathrm{L}10 = 2{,}3026$.)

On calculera, à l'aide des tables de logarithmes, les ordonnées des points d'abscisses 1, 2, 3 *et les coefficients angulaires des tangentes en ces points.*

2° *Calculer avec trois décimales exactes, à l'aide du développement de* y *en une série entière par rapport à* x, *les ordonnées des points ayant respectivement pour abscisses* 0,25, 0,5, 0,75.

3° *Calculer avec deux décimales exactes l'abscisse du point ayant pour ordonnée* 1.

(*Certificat de Mathématiques générales*, *Caen*, 1913.)

1° On a

pour $x = 1$, $y = \mathrm{L}2 = 0{,}69315$,
$x = 2$, $y = 2\mathrm{L}5 = \mathrm{L}25 = 3{,}21888$,
$x = 3$, $y = 3\mathrm{L}10 = \mathrm{L}1\,000 = 6{,}90776$.

2° On trouve

pour $x = 0{,}25$, $y = 0{,}015$,
$x = 0{,}50$, $y = 0{,}111$,
$x = 0{,}75$, $y = 0{,}334$.

3° L'abscisse demandée est 1,16 à $\frac{1}{100}$ près par défaut.

194. *Les trois axes* Ox, Oy, Oz *étant rectangulaires, on considère l'ellipsoïde de révolution dont les trois demi-axes dirigés suivant* Ox, Oy, Oz *ont pour longueurs*

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1^{\mathrm{m}}, \qquad \mathrm{OC} = 2^{\mathrm{m}}.$$

1° *Déterminer à* 1^{cm^3} *près le volume limité par l'ellipsoïde, le plan* xOy *et le plan parallèle à* xOy *de cote* 75^{cm}.

2° *Déterminer à* 1cm *près la cote d'un plan* P *parallèle à* xOy, *tel que le volume compris entre* xOy, *le plan* P *et l'ellipsoïde soit égal à* 2^{m^3}.

Nota. — *On donne* $\pi = 3{,}1415926535\ldots$; *on prendra dans les calculs le nombre de décimales utiles.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Caen*, 1912.)

1° Le volume demandé est $2^{m^3},245747$.
2° La cote du plan P est $0^m,66$.

195. *Soient deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy *et l'hyperbole* (H) *d'équation* $xy = 1$.

Déterminer les coordonnées x, y ($x > 1$, $y < 1$) *d'un point* M *de* H *satisfaisant à la condition suivante :*

Soit P *l'intersection de la parallèle à* Ox *menée par* M *avec la parallèle à* Oy *menée par* A, A *étant le point de* (H) *d'abscisse* $x = 1$; *l'aire limitée par l'hyperbole* (H), *les droites* AP *et* PM *doit être égale à* 1.

On calculera x *et* y *avec la précision que comportent les tables de logarithmes à cinq décimales.*

On pourra d'abord calculer y.

(*Certificat de Mathématiques générales, Paris*, 1912.)

On trouve que y est racine de l'équation

$$y - Ly - 2 = 0;$$

la valeur de la racine à $\frac{1}{10^4}$ près est 0,1586.

196. *Construire la courbe représentée par l'équation* $y = -L\cos x$.

Soit M *le point de cette courbe qui a pour abscisse* $\frac{\pi}{3}$. *On demande de calculer :* 1° *l'angle de la tangente au point* M *avec*

Ox; 2° le rayon de courbure au point M; *3° la longueur de l'arc* OM.

(*Certificat de Mathématiques générales, Rennes*, 1909.)

On trouve :

1° $\frac{\pi}{3}$; 2° 2; 3° $\mathrm{L\,tg}\frac{5\pi}{12} = 1{,}317$.

197. *Un tonneau est assimilé à la portion d'un ellipsoïde de révolution allongé comprise entre deux plans perpendiculaires à l'axe de révolution et symétriques par rapport au plan de l'équateur.*

1° *Le diamètre du cercle d'équateur étant de* $0^m,6$, *celui des cercles de fond de* $0^m,5$ *et la hauteur du tonneau de* $0^m,9$, *calculer le volume du tonneau.*

2° *On suppose que le grand axe de l'ellipse méridienne a* $2^m,4$ *et le petit axe* $0^m,8$. *Calculer la hauteur x que doit avoir le tonneau pour que son volume soit équivalent à celui d'une sphère de* $0^m,5$ *de rayon. Montrer que le nombre x est racine de l'équation*

$$x^3 - 17{,}28x + 18 = 0,$$

et déterminer sa valeur à un centimètre près.

(*Certificat de Mathématiques générales, Paris*, 1917.)

Réponses : 1° $0{,}07275\,\pi$ ou $0^{m^3},22855$;

2° $1^m,12$, à un centimètre près par défaut.

198. *Étant donnée la série*

$$f(x) = \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \dots.$$

1° *Dire quel est son intervalle de convergence;*

2° *Calculer* $f\left(\frac{1}{2}\right)$ *à 0,001 près.*

3° *Trouver sous forme finie l'expression de* $f'(x)$; *en déduire celle de* $f(x)$.

4° *Se servir de l'expression obtenue pour contrôler la valeur précédemment trouvée pour* $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

(*Certificat de Mathématiques générales, Lyon*, 1910.)

On trouve $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}153$.

199. 1° *En désignant par* Ox, Oy *deux axes rectangulaires, et par* x, y *les coordonnées d'un point en centimètres, construire la courbe*

$$y = 10e^{-x^2}\sin 2x.$$

2° *Déterminer en particulier à* 1^{mm} *près la valeur de la première ordonnée maxima à droite de* Oy.

3° *A partir de quelle valeur absolue de* x *la valeur absolue de l'ordonnée* y *reste-t-elle constamment inférieure à* $\frac{1}{10}$ *de millimètre?*

4° *Calculer d'une façon approchée l'aire comprise entre* Ox, *et l'arc de courbe qui va du point* O *jusqu'au premier point de rencontre avec* Ox *à droite de* O. *Indiquer l'approximation obtenue.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Caen*, 1912.)

200. *Sur un cylindre droit dont la base est un cercle de* 5^{m} *de rayon, on a tracé une hélice qui coupe les génératrices du cylindre sous un angle de* 30°. *Calculer, avec l'approximation que comporte l'emploi des tables de logarithmes, la longueur du plus petit arc de l'hélice considérée, tel que les tangentes menées à la courbe aux extrémités de cet arc se rencontrent.*

(*Agrégation*, 1886.)

201. 1° *Construire la courbe*

$$y = \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{(x+1)^2 (x^2+1)}$$

sans étudier la dérivée y'. Position des branches de la courbe par rapport aux asymptotes.

2° *Calculer*

$$\int_0^1 y\,dx.$$

3° *Nombre de points d'intersection réels de la courbe et de la droite* $y = 1$. *Calculer à* 0,1 *près les coordonnées de ces points d'intersection.*

(*Certificat de Mathématiques générales*, *Lyon*, 1912.)

202. 1° *Résoudre l'équation*

$$f(x) \equiv x^6 - 8x^5 + 25x^4 - 38x^3 + 28x^2 - 8x = 0,$$

sachant que les racines sont commensurables.

2° *Décomposer en éléments simples la fonction*

$$F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

3° *Tracer la courbe* $y = F(x)$.

4° *Calculer l'aire limitée par cette courbe, l'axe des* x *et les ordonnées* $x = 3$, $x = 4$.

(*Certificat de Mathématiques générales*, *Lille*, 1910.)

203. *On donne la série*

$$\cos x + r\cos 2x + r^2 \cos 3x + \ldots + r^n \cos(n+1)x + \ldots.$$

1° *Démontrer que cette série est convergente pour toute valeur de* x *lorsqu'on a* $|r| < 1$.

2° *Soit* $S_n(x)$ *la somme des* n *premiers termes de la série,*

Calculer à $\frac{1}{100}$ *près les racines comprises entre* $-\pi$ *et* $+\pi$ *des équations*

$$S_1(x) = 0, \qquad S_2(x) = 0, \qquad S_3(x) = 0,$$

où l'on suppose $r = \frac{1}{10}$

3° *Calculer à* $\frac{1}{10\,000}$ *près la somme de la série donnée lorsque* $r = \frac{1}{100}$, $x = 61°$.

(*Certificat de Mathématiques générales, Nancy*, 1911.)

204. 1° *Construire la partie de la courbe*

$$y = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x - 1}$$

correspondant aux valeurs de x *supérieures à* $\frac{1}{2}$.

2° *Montrer que cette partie de la courbe est tangente à l'axe* Ox *et déterminer le point de contact* A.

3° *Calculer à* $\frac{1}{100}$ *près la valeur de* x *qui rend* y *maximum et la valeur correspondante de* y.

4° *Démontrer que la courbe présente un point d'inflexion entre le point* A *et le point* M *qui correspond au maximum de* y.

(*Certificat de Mathématiques générales, Paris*, 1906.)

205. 1° *Construire, par rapport à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *la courbe représentée par l'équation*

$$y = x^3 \mathrm{L}x - x - 1,$$

où Lx *désigne le logarithme népérien de* x.

2° *Calculer, avec trois décimales exactes, la racine de l'équation*

$$x^3 \mathrm{L}x - x - 1 = 0.$$

(*On rappelle que* L10 = 2,3026.)

(*Certificat de Mathématiques générales, Caen*, 1914.)

206. 1° *Construire la courbe représentée par l'équation*

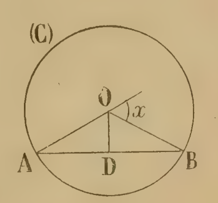
$$y = \frac{x(e_x + 1)}{e^x - 1}.$$

Minimum de y. Asymptotes. Position de la courbe par rapport aux asymptotes.

2° *Nombre de points d'intersection de la courbe avec la droite* $y = 3$. *Calculer à* $\frac{1}{10}$ *près l'abscisse de l'un de ces points.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Lyon*, 1914.)

207. *Un récipient d'une contenance de* 10 *litres a la forme d'un cylindre de révolution limité par deux plans perpendiculaires à l'axe* Δ *du cylindre et situés à une distance de* 50 *centimètres l'un de l'autre. On verse* 2 *litres de liquide à l'intérieur du récipient supposé placé de telle sorte que* Δ *soit horizontal.*



Soit (C) *la section du récipient par un plan* P *perpendiculaire à* Δ, O *l'intersection de* P *avec* Δ, AB *l'intersection de* P *avec la surface libre du liquide et x le supplément de l'angle* AOB.

1° *Former l'équation à laquelle satisfait x.*

2° *Résoudre cette équation avec la précision que comportent les tables de logarithmes à cinq décimales.*

3° *Calculer en centimètres (avec la même précision) la distance* OD *de l'axe du récipient à la surface libre.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Paris*, 1912.)

Multiples de M et de $\frac{1}{M}$.

	M	$\frac{1}{M}$
1	0,43429	2,30259
2	0,86859	4,60517
3	1,30288	6,90776
4	1,73718	9,21034
5	2,17147	11,51293
6	2,60577	13,81551
7	3,04006	16,11810
8	3,47436	18,42068
9	3,90865	20,72327

Multiples de $\frac{\pi}{200}$ et de $\frac{200}{\pi}$.

	$\frac{\pi}{200}$	$\frac{200}{\pi}$
1	0,015708	63,6620
2	0,031416	127,3240
3	0,047124	190,9859
4	0,062832	254,6479
5	0,078540	318,3099
6	0,094248	381,9719
7	0,109956	445,6338
8	0,125664	509,2958
9	0,141372	572,9578

TABLE DES MATIÈRES

299-21. — Coulommiers. Imp. Paul BRODARD. — 7-21.

EXTRAIT DU CATALOGUE

DE LA LIBRAIRIE VUIBERT

63, Boulevard Saint-Germain, Paris, 5e.

Compléments d'Algèbre et Notions de Géométrie analytique, à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales et des candidats aux grandes écoles, par A. Macé de Lépinay, professeur au lycée Henri-IV. — Vol. 22/14cm. 7e édition . . . . 10 fr. 50

Théorie des Nombres irrationnels, *des limites et de la continuité,* par René Baire, professeur à l'Université de Dijon. — Vol. 22/14cm. 2e édition. . . . . 2 fr. 25

Cours de Mathématiques spéciales sous forme de problèmes (*Algèbre et analyse, trigonométrie, géométrie analytique, mécanique, géométrie descriptive*), par R. Noguès, professeur honoraire au lycée Janson-de-Sailly. — Vol. 25/16cm. . . . . 15 fr. »

Cours de Géométrie analytique, par G. Bouligand, professeur au lycée de Rennes, avec une préface de M. Cartan, professeur à la Sorbonne. Vol. 22/14cm de XII-421 pages, avec figures. . . . . . 16 fr. »

Cours de Géométrie analytique, par W. de Tannenberg, ancien professeur de l'Université de Bordeaux. Publié par fascicules 28/22cm.

- *1er fascicule :* La ligne droite . . . . 3 fr. 80
- *2e fascicule :* Courbes planes en général [Courbes dont l'équation a la forme $y = f(x)$] . . . . 3 fr. 80
- *3e fascicule :* Courbes planes en général [Courbes définies par leurs équations paramétriques] . . . . 3 fr. 80

Cours de Géométrie descriptive, à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales et des candidats aux grandes écoles, par X. Antomari, docteur ès sciences, professeur au lycée Carnot. — Vol. 25/16cm, avec épures dans le texte. 7e édition . . . . 18 fr. »

Problèmes et épures de géométrie descriptive et de géométrie cotée, par N. Charruit, professeur au lycée de Lyon. — Vol. 25/16cm, avec figures et épures dans le texte. 2e édition. . . . . 7 fr. »

Problèmes et épures de géométrie descriptive, à l'usage des candidats au Baccalauréat et aux écoles spéciales, par P. Mineur, professeur au lycée Rollin. — Vol. 22/14cm, avec figures et épures dans le texte. 7 fr. »

Problèmes de Physique et de Chimie, à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales et des candidats aux grandes écoles, par Ch. Rivière, docteur ès sciences, professeur au lycée Saint-Louis. — Vol. 22/14cm. 3e édition. . . . . 8 fr. »

Introduction à l'Étude de la Théorie des Nombres et de l'Algèbre supérieure, par E. Borel et J. Drach, d'après des conférences faites à l'Ecole normale supérieure par Jules Tannery, directeur des études scientifiques. — Vol. 25/16cm . . . . 18 fr. »

Résolution algébrique des équations (*Leçons sur la*), par H. Vogt, professeur à la Faculté des sciences de Nancy, avec une préface de M. Jules Tannery. — Vol. 25/16cm . . . . 10 fr. »

Pour la majoration temporaire à ajouter aux prix indiqués, consulter le catalogue.

Résolution des Équations (*Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes*), par E. CARVALLO, directeur des études à l'Ecole Polytechnique. — Vol. 28/22cm. 3e édition . . . . 2 fr. »

Résolution des Équations du 3e degré (Nouvelles méthodes), par de GALEMBERT. — Br. 22/14cm . . . . 2 fr. »

Abaques pour le calcul des taux de placement, par A. MACHERET. Planche 37 × 56cm et notice 22/14cm . . . . 3 fr. »

Questions de Géométrie élémentaire (Leçons sur certaines) : *Possibilité des constructions géométriques. Les polygones réguliers. Transcendance des nombres e et π (démonstrations élémentaires)*, par F. KLEIN, professeur à l'Université de Gœttingue, rédaction française de J. GRIESS. — Vol. 22/14cm. 2e édition . . . . 3 fr. 50

Courbes géométriques remarquables, *planes et gauches*, par H. BROCARD et T. LEMOYNE. — Ouvrage honoré d'une subvention de l'Académie des Sciences, fondation Loutreuil. 3 vol. 25/16cm.
Tome I . . . . 25 fr. »
Tomes II et III . . . . (En préparation.)

Les lecteurs trouveront dans cet ouvrage des méthodes leur permettant de résoudre géométriquement, avec une extrême facilité, un nombre considérable de problèmes de géométrie analytique plane relatifs aux coniques et aux autres courbes. Le tome I renferme, en particulier, l'un des exposés les plus complets des propriétés des coniques.

Conférences sur les Transformations en Géométrie plane, par W. de TANNENBERG, ancien professeur de l'Université de Bordeaux. — Vol. 25/16cm. . . . . 4 fr. »

Cours de Cinématique théorique et appliquée, par P. BOURGUIGNON. professeur à l'Ecole d'Arts et Métiers d'Angers. — 2 vol. 25/16cm, avec 540 figures. 3e édition.
I. *Cinématique théorique* . . . . 8 fr. »
II. *Cinématique appliquée* . . . . 20 fr. »

Problèmes de Géométrie analytique

par E. MOSNAT, professeur au lycée Rollin. — Trois vol. 22/14cm :

Tome I, à l'usage des candidats aux Écoles Centrale, Navale, des Ponts et Chaussées, des Mines de Paris et de Saint-Etienne et des aspirantes à l'Agrégation des jeunes filles. 5e édition, augmentée . 15 fr. »

Tome II (*Géométrie à deux dimensions*), à l'usage des candidats à l'Ecole Polytechnique, à l'Ecole Normale et à l'Agrégation. 3e édition. 15 fr. »

Tome III (*Géométrie à trois dimensions*), à l'usage des candidats à l'Ecole Polytechnique, à l'Ecole Normale et à l'Agrégation. 2e édition augmentée . . . . 15 fr. »

EXERCICES DE DESSIN GRAPHIQUE

(MACHINES ET ARCHITECTURE)

Conformes au programme d'admission à l'Ecole polytechnique.

Chaque exercice (organe de machine ou fragment d'architecture) est préparé dans l'esprit de l'examen et comporte toutes les explications voulues (exécution du dessin *d'après un croquis coté simple*, avec la description du motif, les indications nécessaires sur l'échelle, l'esquisse au crayon, la mise à l'encre, le lavis, — total ou partiel, — les teintes, etc...).

La série, comprenant 12 planches 25 × 32cm (6 pl. dessins de machines et 6 pl. dessins d'architecture) . . . . 3 fr. 50

Épreuve de dessin graphique (*croquis coté*), donnée au concours d'admission à l'Ecole Polytechnique. Concours de 1905 à 1914, planche 25 × 32cm. . . . . 3 fr. 50

La dernière année parue . . . . 1 fr. »

EXÉCUTION DES ÉPURES ET LAVIS

INSTRUCTIONS ET CONSEILS

Une brochure 18/12cm, 12e *édition*. . . . . 2 fr. »

Cette brochure, écrite par une sommité de l'enseignement du dessin, rendra de grands services aux candidats à l'École Polytechnique.

Résumé des principes de la Perspective linéaire, par J. Lebel, docteur ès sciences, professeur au lycée de Dijon. Vol. 25/16cm. **3** fr. »

Cours de croquis coté, par A. Legrand, directeur des cours de dessin industriel de Dieppe, professeur au Collège. — Deux vol. 24/18cm (*Texte et Planches*) . . . . 7 fr. »

Ce cours de Croquis coté convient aux élèves des classes scientifiques des lycées et collèges. Il répond aux programmes des Certificats d'aptitude à l'enseignement du travail manuel et du dessin dans les écoles normales, aux concours d'admission aux écoles d'Arts et Métiers, à l'école Navale, à l'Institut agronomique, aux Ecoles nationales d'Agriculture, à l'école de Physique et de Chimie industrielles, à l'Institut industriel du nord de la France, etc. Enfin, il rendra les plus grands services aux élèves qui se destinent à l'école Centrale, à l'école Polytechnique, aux écoles d'électricité, etc.

Tracé des ombres, à l'usage des candidats à l'École Centrale des Arts et Manufactures et des candidats à l'École des Beaux-Arts (section d'architecture), par J. Geffroy, professeur à l'École Centrale. — Un volume 25/16cm, avec 97 figures, 6e édition. . . . . 8 fr. »

Les candidats à l'École Centrale et à l'École des Beaux-Arts ont à déterminer les ombres dans leur dessin d'architecture. Bien que cette détermination ne soit qu'une application des méthodes de géométrie descriptive, l'aspect particulier des données suffit, au début, pour gêner les élèves. Cet ouvrage indique, dans les cas usuels, la nature du problème à résoudre, la méthode de géométrie correspondante et la façon de l'employer. L'auteur a classé les exemples, en groupant tous ceux qui peuvent se résoudre à l'aide de la même méthode et qui représente, par suite, des aspects particuliers d'un même problème.

Revue de Mathématiques spéciales

(32e année : 1921-1922).

Rédigée par MM. E. HUMBERT et G. PAPELIER,
avec la collaboration de MM. P. LAMAIRE, J. LEBEL, Ch. RIVIÈRE et H. VUIBERT

La Revue paraît mensuellement (12 numéros par an, de 24 ou 32 pages), avec figures et épures dans le texte (format 28/22cm). Les abonnements sont annuels et partent d'octobre. A quelque époque de l'année que l'on s'abonne, on reçoit tous les numéros parus depuis le mois d'octobre précédent.

Abonnement annuel . . . . **25 fr.** »

Journal de Mathématiques élémentaires

publié par **H. VUIBERT** (*46e année*).

Journal 28/22cm, avec figures et épures dans le texte, paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet.

Abonnement annuel : **10** francs. (On envoie à toute époque de l'année les numéros parus depuis le 1er octobre précédent.)

Éléments de Mathématiques supérieures

à l'usage des physiciens, chimistes et ingénieurs, et des élèves des Facultés des sciences, par H. VOGT, ancien élève de l'école Normale supérieure, professeur à l'Université de Nancy. — Un fort volume 25/16cm avec figures, 9e édition . . . . **20 fr.** »

Règle à calcul

(Instruction détaillée et méthode pratique pour son emploi)

à l'usage des Ingénieurs, Architectes, Conducteurs de Travaux, etc., par A. DREYSSÉ, ancien chef d'escadron d'Artillerie de Marine, ancien élève de l'école Polytechnique. — Volume 22/14cm, 3e édition . . . . **6 fr.** »

Approximations dans les Mesures physiques

et dans les calculs numériques qui s'y rattachent, par E. COLARDEAU, professeur au collège Rollin. — Un volume 22/14cm, avec 103 figures, 2e édition, broché . . . . **10 fr.** »

H. VUIBERT *(32e année.)*

ANNUAIRE DE LA JEUNESSE

Moyens de s'instruire. — Choix d'une carrière. — Un volume 18/12cm de 1200 pages . . . . Sous presse.

Dans la première partie : **Éducation et Instruction**, on passe en revue tout ce qui a trait à l'instruction des garçons et des filles à tous ses degrés. L'auteur ne se limite pas, bien entendu, aux établissements universitaires; il s'étend aussi bien sur tout ce qui a un caractère spécial.

La seconde partie : **Écoles spéciales**, intéresse surtout les jeunes gens qui se destinent aux écoles où l'on va couronner son instruction; elle leur montre ce que sont ces écoles, les moyens de s'y préparer, les difficultés des concours, la nature de l'enseignement, les débouchés qui s'offrent à la sortie, etc. Le candidat sait ainsi où il va et peut se rendre compte de ses chances de succès.

